Tabelle der Stundenverteilung im letzten Semester.

Lehrer.	Ordinariate.	I.	II G.	II R.	III G.	III R.	IV G.	IV R.	V.	VI.	Vorschule.
Director Jessen.	I.	Religion 2 Griechisch 6 Dänisch 2	Religion 2 Dänisch 2								
Prof. Beckmann		Deutsch 3 Hebräisch 2	Hebräisch 2	Religion 2 Deutsch 3 Geschichte 2	Religion 2	Religion 2 Geschichte 2					
Oberl. Dr. Siemonsen	II G.	Horaz 2	Deutsch 2 Latein 7 Griechisch 4 Geschichte 3								
Wolff, O.-L.	III G.	Latein 6	Vergil 2 Homer 2		Latein 7 Gesch. u. Geogr. 3						
Hunrath, O.-L.	III R.			Geograph. 1 Mathemat. 5 Naturw. 4	Mathem. (b) 3	Mathematik 5	Rechnen 4				
Dr. Petersen, O-L.	II R.	Französ. 2 Englisch 2	Französ. 2	Französ. 4 Englisch 3	Französ. 2	Französ. 4					
Dr. Geibel, o. L.	IV.					Latein 6	Deutsch 2 Latein 9		Französ. 4		
Dr. **Hagge,** o. L.		Mathemat. 3 Naturw. 2	Englisch 2 Mathemat. 3 Naturw 2	Chemie 2	Mathem. (a) 3 Naturw. 2		Französisch 4				
Vollert, o. L.						Englisch 4 Geograph. 2 Naturgesch. 2	Naturgesch. 2		Geographie 2 Naturgesch. 2 Schreiben 2	Geographie 2 Naturgesch. 2 Schreiben 2	
Dr. **Godt,** o. L.	V.	Geschichte 3			Deutsch 2 Griech. (a) 6				Latein 9		
Schröder, o. L.	VI.						Dänisch 2		Religion 2 Dänisch 1	Religion 3 Deutsch 4 Latein 9 Dänisch 2	
Dr. Petersen, Hülfslehrer.				Latein 4	Ovid 2 Griech. (b) 6		Religion 2 Geschichte 2 Geograph. 2				Religion 4
Langla, cand. prob.				Dänisch 2	Dänisch 2	Deutsch 3 Dänisch 2			Deutsch 2		
Segeberg	Vorschule								Rechnen 4	Rechnen 4	Deutsch 10 Rechnen 4 Schreiben 4
Hartwig techn. L.				Zeichnen 2		Zeichnen 2	Zeichnen 2		Zeichnen 2	Zeichnen 2	

Ausserdem Singen 7. Turnen 8 Stunden.

Ueber das Ausziehen der Quadratwurzel bei Griechen und Indern

von

Oberlehrer Karl Hunrath.

Von der folgenden Arbeit ist, soweit sie sich auf die bei **Archimedes** und bei **Heron** vorkommenden quadratischen Irrationalitäten bezieht, der Grundgedanke von Herrn Professor Dr. S. **Günther** in eine Nachschrift zu seiner Abhandlung: „Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwicklungsmethoden“ (Supplement zum 27. Jahrgang der **Zeitschrift für Mathematik und Physik, Leipzig,** 1882) aufgenommen worden. Indem ich die mir gebotene Gelegenheit benutze, über diese und verwandte Fragen mich des Weiteren zu verbreiten, kann ich nicht umhin, dem genannten Herrn für die Hülfe, die mir seine Arbeit gewährt hat, sowie für manche sonst freundlichst gegebene Auskunft meinen Dank auszusprechen. Nicht minderen Dank schulde ich Herrn Professor Dr. M. **Cantor,** der mir durch seine „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“, I. Band, **Leipzig,** 1880, den ersten Anstoss zu meiner Arbeit gegeben, auch mit seltener Liberalität literarische Hülfsmittel aus seiner Bibliothek zur Verfügung gestellt hat.

A. Die Griechen.

I. Die Quadratwurzel aus 2.

Euklid hat für den Satz, dass die Diagonale eines Quadrats mit der Seite, die Hypotenuse eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks mit der Kathete incommensurabel sei, einen zahlentheoretischen Beweis überliefert[1]), der in moderner Ausdrucksweise so lauten würde: sind p und q die kleinsten Zahlen, welche das Verhältnis der beiden genannten Strecken angeben, also $p^2=2q^2$, so ist p^2, mithin auch p eine gerade Zahl $=2m$, folglich das p teilerfremde q eine ungerade Zahl; aus $p=2m$ folgt aber $4m^2=2q^2$ oder $q^2=2m^2$, also q^2 und somit auch q eine gerade Zahl; es müsste daher q zugleich gerad und ungerad sein, oder wie **Aristoteles**[2]) sagt, es müsste Gerades und Ungerades gleich sein. Verfolgt man den diesem apagogischen Beweis zu Grunde liegenden Gedanken weiter, so kommt man zu folgenden Schlüssen.

Ist die Seite eines Quadrats eine ungerade Zahl, so erhält man für das Quadrat der Diagonale eine durch 2, aber nicht durch 4 teilbare Zahl, also keine Quadratzahl; wohl aber kann die um 1 vermehrte oder verminderte Zahl das Quadrat einer ungeraden, und die um 2 vermehrte oder verminderte Zahl das Quadrat einer geraden Zahl sein. Ist aber die Seite des Quadrats eine gerade Zahl, $=2n$, so erhält man für das Quadrat der Diagonale wieder eine gerade Zahl, $8n^2$; diese Zahl kann keine Quadratzahl sein, wohl aber die vorhergehende oder die folgende ungerade Zahl, $8n^2 \pm 1$; dagegen kann die $8n^2$ vorhergehende oder folgende gerade Zahl $8n^2 \pm 2 = 2\,(4n^2 \pm 1)$ wieder keine Quadratzahl sein.

Mit ähnlichen Untersuchungen scheinen sich nun die Griechen beschäftigt zu haben. So spricht **Plato** an einer vielberufenen Stelle[3]) von der Diagonale eines Quadrats mit der Seite 5, oder von dem Diameter des einem Quadrat mit der Seite 5 umbeschriebenen Kreises, der rational sei, wenn man 1, irrational, wenn man 2 abziehe: allgemein wird Das so verstanden, dass $\sqrt{2.5^2-1}=\sqrt{49}=7$ rational, $\sqrt{2.5^2-2}=\sqrt{48}$ irrational sei. Sodann führt **Theon von Smyrna**[4]) für Zahlen von der Form $2a^2\pm1=b^2$, die er Seiten- und Diametral-Zahlen (eines Quadrates) nennt, ohne Beweis einen Lehrsatz an, den wir so aussprechen würden:

„Ist $2a^2\pm1=b^2$, so ist $2(a+b)^2\mp1=(2a+b)^2$."

Diese Recursivformel enthält die Regel, aus zwei durch Versuch gefundenen Werten eine fortschreitende Reihe von Näherungswerten für das Verhältnis der Diagonale eines Quadrats zur Seite zu finden. Die Bemerkung **Plato's**, dass $7^2=2.5^2-1$ ist, finden wir von **Proklus**[5]), den Satz **Theon's** von **Jamblichos**[6]) wiederholt. Endlich scheint die Bemerkung **Plato's**, dass 2.5^2-2 irrational sei, anzudeuten, dass die Griechen sich auch mit Zahlen beschäftigt haben, welche der Form $2b^2\pm2=c^2$ genügen. Dieselben ergeben sich auch ohne Weiteres aus den Zahlen der obigen Form, wenn man b als die Seite eines neuen Quadrats mit der Diagonale $c=2a$ ansieht; es ist dann $2b^2\mp2=4a^2=c^2$, und für solche Zahlen gibt es ein dem obigen ähnliches Bildungsgesetz:

„Ist $2b^2\mp2=c^2$, so ist $2(b+c)^2\pm2=(2b+c)^2$."

Die beiden Zahlformen $2a^2\pm1=b^2$ und $2a^2\pm2=b^2$ sind in der allgemeineren $2a^2\pm R=b^2$ als besondere Fälle enthalten und fallen für uns unter den Begriff der quadratischen Reste. Den für solche Zahlen geltenden Satz würden wir in der von **Gauss** eingeführten Zeichensprache so ausdrücken:

„Wenn $2a^2\equiv\pm R\ [\text{mod. } b^2]$, so ist $2(a+b)^2\equiv\pm R\ [\text{mod. } (2a+b)^2]$",

und den Beweis würden wir arithmetisch führen. Aber auch ein geometrischer Beweis lässt sich leicht finden. Konstruiert man (Fig. I) über $2a+b$ ein Quadrat, zerlegt dasselbe nach dem Satz von den Komplementen in die Summe zweier Quadrate*), $(a+b)^2$ und a^2, und zweier Rechtecke, beide gleich $a(a+b)$, und teilt jedes der letzteren wieder in die Flächen a^2 und ab, so ist

$$(2a+b)^2=(a+b)^2+a^2+2ab+2a^2;$$

unter der Voraussetzung $2a^2\pm R=b^2$ oder $2a^2=b^2\mp R$ ergiebt sich daraus

$$(2a+b)^2=(a+b)^2+a^2+2ab+b^2\mp R=2(a+b)^2\mp R.$$

Die Methode **Theon's** liefert für $\sqrt{2}$ eine unbegrenzte Zahl von Näherungswerten

$$\frac{1}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ ,$$

von denen $\frac{7}{5}$ der gebräuchlichste und bekannteste gewesen zu sein scheint[7]). Dass diese Näherungswerte mit denen des unendlichen periodischen Kettenbruchs

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$$

zusammenfallen, ist schon mehrfach hervorgehoben worden[8]).

---

*) Die dem Quadrat über $(a+b)$ einbeschriebene Figur bitte ich vorläufig nicht zu beachten.

II. Die Teilung nach dem goldenen Schnitt.

In einer Abhandlung[9]), die ich mir nicht habe zugänglich machen können, hat **Hultsch** durch genaue Nachmessungen die schon früher[10]) gemachte Beobachtung bestätigt gefunden, dass für die Grundmasse der griechischen Tempel mit Vorliebe Verhältniszahlen benutzt worden sind, die sich als Näherungswerte für das Verhältnis des grösseren Abschnitts einer nach dem goldenen Schnitt geteilten Strecke zu dieser selbst oder des kleineren Abschnitts zum grösseren zu erkennen geben. **Hultsch** glaubt aus seinen Messungen folgende Zahlenreihe[11]) herleiten zu können:

$$90,\ 56,\ 34,\ 21,\ 13,\ 8,\ 5,\ 3,\ 2,\ \frac{6}{5},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{2},$$

und sieht in ihr eine geometrische Reihe mit dem Exponent $\frac{21}{34}$, für den bisweilen $\frac{11}{17}=\frac{22}{34}$ eintritt[12]), und mit abgerundeten Gliedern. Für diesen Exponenten $\frac{21}{34}$ nimmt er in Anspruch, dass er der bevorzugte Näherungswert für das in Rede stehende Verhältnis

$$(a-x) : x = x : a = (\sqrt{5}-1) : 2$$

sei, und kommt so auf den Näherungswerth $\frac{38}{17}$ für $\sqrt{5}$. Was die aufgestellte Reihe selbst angeht, so findet man als Quotienten je zweier auf einander folgender Glieder

$$\frac{28}{45},\ \frac{17}{28},\ \frac{21}{34},\ \frac{13}{21},\ \frac{8}{13},\ \frac{5}{8},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{8},\ \frac{2}{3},$$

und jeder dieser Quotienten ist ein Näherungswert für obiges Verhältniss. Nimmt man zu der Reihe noch die beim Artemision[13]) vorkommenden Abmessungen 240, 150 hinzu, so erhält man zwei weitere Quotienten $\frac{90}{150}=\frac{3}{5}$ und $\frac{150}{240}=\frac{5}{8}$.

Es tritt dann aber deutlich hervor, dass in dieser Reihe die Näherungswerte $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$ die bevorzugten sind. Beschränken wir nun die obige Reihe auf ganze Zahlen, so erhält man

$$90,\ 56,\ 34,\ 21,\ 13,\ 8,\ 5,\ 3,\ 2.$$

Diese Reihe genügt bis auf eine Ausnahme $56>34+21$, nämlich $=34+22$ der Relation $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$; doch scheint diese Ausnahme sich aus dem schon erwähnten Umstand zu erklären, dass zuweilen das Verhältnis $\frac{11}{17}=\frac{22}{34}$ für $\frac{21}{34}$ gebraucht wird. Ferner genügen der Relation $u_{n-1}^2 = u_u u_{n-2} \pm 1$ die Glieder von $u_{n-1}=3$ bis $u_{n-1}=21$. **Günther** hat in seiner Abhandlung darauf hingewiesen[14]), dass diese Reihe mit der aus dem unendlichen periodischen Kettenbruch $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$ sich ergebenden Zahlenreihe grosse Verwandtschaft zeigt, auch hervorgehoben[15]), dass mit letzterer Reihe schon ein Mathematiker, der keine Kenntnis des Kettenbruch-Algoritmus hatte, **Fibonacci**, sich eingehend beschäftigt hat. Ich werde nun versuchen, das Gesetz jener recurrierenden Reihe in der Fassung:

„Wenn $a(a-b)=b^2 \pm R$, so ist $b(a+b)=a^2 \mp R$“

auf einem Wege abzuleiten, der auch den Griechen offen stand. Ich konstruiere (Fig. II) aus

$a+b$ und b ein Rechteck, darnach über a ein Quadrat : ich erhalte

$$b(a+b)=a^2+b^2-a(a-b)$$

Hieraus folgt unter der Voraussetzung $b^2=a(a-b)\mp R$ unmittelbar

$$b(a+b)=a^2\mp R.$$

Setzt man 1 als kleinsten Wert für den kleineren Abschnitt $a-b$, 2 als solchen für den grösseren Abschnitt b, also 3 für die ganze Strecke a, so hat man erste Näherungswerte für

$$a(a-b)=b^2-1;$$

hieraus erhält man $a+b=5$ und $2.5=3^2+1$ als erste Näherungswerte für

$$b(a+b)=a^2+1.$$

Bei dieser Ableitung habe ich den oben besprochenen Satz **Theon's** im Auge gehabt und die Beziehung der sich ergebenden Verhältniszahlen $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \ldots$ zu $\sqrt{5}$ ausser Acht gelassen. Auf diese Quadratwurzel werde ich weiter unten zu sprechen kommen.

III. Die Quadratwurzel aus 3.

Es liegt nun nahe, in ähnlicher Weise, wie für $\sqrt{2}$ und den goldenen Schnitt, eine recurrierende Reihe für $\sqrt{3}$ abzuleiten. In der Tat ist dieser Weg von **Zeuthen**[16]) und **Tannery**[17]) eingeschlagen worden, welche die überlieferten Näherungswerte für $\sqrt{3}$ als singuläre Lösungen der Gleichungen $3a^2+1=b^2$ und $3a^2-2=b^2$ ansehen.

Zeuthen benutzt nach **Günther** a. a. O. zur Lösung der ersteren Gleichung die Identität

$$3\cdot\left(2ab\right)^2+\left(b^2-3a^2\right)^2=\left(b^2+3a^2\right)^2, \tag{1}$$

welche leicht aus **Euklid**, lib. II, prop. 5, habe geschöpft werden können, findet für $b^2-3a^2=1$ die Lösung in kleinsten Zahlen durch Versuch, $b=2$ und $a=1$, und kann nach jener Formel eine fortschreitende Reihe weiterer Näherungswerte bilden. Schon **Günther** hat bemerkt, dass diese Reihe nicht alle Lösungen enthält. Vergleichen wir daher **Zeuthen**'s Identität mit der, die alle Lösungen der Gleichung $3a^2+1=b^2$ liefert, nämlich mit

$$3(2a+b)^2+b^2-3a^2=(3a+2b)^2. \tag{2}$$

Um die Frage allgemein zu behandeln, für

$$n\alpha^2-\beta^2=-1 \quad (\beta \text{ und } \alpha \text{ kleinste Werte})$$

und $na^2-b^2=R$ liefert die uns später wieder begegnende Identität

$$n(\alpha b+\beta a)^2-(n\alpha a+\beta b)^2=-(n\alpha^2-\beta^2)(na^2-b^2)=R\text{*)}$$

die nächste Lösung für den beliebigen Rest R. Für $R=-1$ ist

$a_1=\alpha$, $a_2=2\alpha\beta$, $a_3=n\alpha^3+3\alpha\beta^2$, $a_4=4n\alpha^3\beta+4\alpha\beta^3=2(n\alpha^2+\beta^2).2\alpha\beta$,

$b_1=\beta$, $b_2=n\alpha^2+\beta^2$, $b_3=3n\alpha^2\beta+\beta^3$, $b_4=n^2\alpha^4+6n\alpha^2\beta^2+\beta^4=(n\alpha^2+\beta^2)^2+n.(2\alpha\beta)^2$,

---

*) Von dem sonst möglichen Wechsel der Vorzeichen von α, bezw. β, sehe ich als für den in Rede stehenden Fall unwesentlich ab.

also $a_2 = 2b_1a_1$ und $a_4 = 2b_2a_2$

$b_2 = b_1^2 + na_1^2$ $b_4 = b_2^2 + na_2^2$; ebenso findet man

$a_8 = 2b_4a_4$ und $b_8 = b_4^2 + na_4^2$.

Es liefert daher, wenn man für n den Wert 3 einsetzt, die **Zeuthen**'sche Identität nur das 2te, 4te, 8te, . . . , 2^nte Paar Näherungswerte der vollständigen Reihe. In der Tat sind

7 und 4 , 97 und 56 , 18 817 und 10 864[18])

bezüglich das 2te, das 4te, das 8te Paar in der vollständigen Reihe der Lösungen

2 und 1, 7 und 4, 26 und 15, 97 und 56, 362 und 209, 1 351 und 780, 5 042 und 2 911, 18 817 und 10 864, . . .[19])

Wenn aber **Zeuthen**[20]) behauptet, auf jenem Wege auch $\frac{1351}{780}$ gefunden zu haben, so liegt vielleicht ein Missverständnis vor.

Für die Lösung der zweiten Aufgabe $3a^2 - 2 = b^2$ benutzt **Zeuthen** die Identität

(3) $$3(b + a)^2 - 2(b^2 - 3a^2) = (b + 3a)^2,$$

aus der man alle Lösungen der Gleichung $3a^2 - 2 = b^2$ erhält, wenn man für b und a alle Lösungen der Gleichung $3a^2 + 1 = b^2$ der Reihe nach einsetzt, und es ist allgemein für $na^2 - b^2 = \pm 1$

$$n(b + a)^2 - (b + na)^2 = -(n - 1)(na^2 - b^2) = \mp(n - 1),$$

wobei sich noch das Vorzeichen von a, bezw. von b, umkehren lässt.

Man kann aber auch[21]) die Formel (3) anwenden, um weitere Lösungen der Gleichung

$$3a^2 + 1 = b^2$$

zu finden. Die kleinsten Werte, welche derselben genügen, seien α und β, so sind $a_1 = \alpha + \beta$ und $b_1 = 3\alpha + \beta$ kleinste Werte für $3a_2 - 2 = b^2$. Bildet man nun $a_1 + b_1 = 4\alpha + 2\beta$ und $3a_1 + b_1 = 6\alpha + 4\beta$, so ergiebt sich aus

$$3(a_1 + b_1)^2 - (3a_1 + b_1)^2 = 2\left(b_1^2 - 3a_1^2\right)$$ die Gleichung

$$3(4\alpha + 2\beta)^2 - (6\alpha + 4\beta)^2 = -2.2$$ oder, wenn beiderseits mit 4 dividirt wird:

$$3(2\alpha + \beta)^2 + 1 = (3\alpha + 2\beta)^2,$$ unsere Formel (2).

Endlich, die gleichzeitige Anwendung der Formeln (2) und (3) auf eine Lösung der Gleichung $3a^2 + 1 = b^2$
liefert den zugeordneten Näherungswert der Gleichung $3a^2 - 2 = b^2$ und den nächsten Näherungswert ersterer Gleichung.

Während **Zeuthen** sich auf die Lösung der Gleichungen $3a^2 - b^2 = -1$ und $3a^2 - b^2 = 2$ beschränkt, leitet **Tannery**[22]), indem er **Diophant**'s Verfahren, rationale Werte für quadratische unbestimmte Gleichungen zu finden, sachgemäss auf ganzzahlige Werte anwendet, für die allgemeine Aufgabe $na^2 - b^2 = \pm R$
folgende in die Zahlentheorie gehörige Sätze ab:

1) Sind α und β die kleinsten positiven ganzen Zahlen, welche der Gleichung

$$nx^2 - y^2 = 1$$

genügen, und ist $na^2 - b^2 = \pm R$, so ist

$$\left.\begin{matrix} n(\alpha b \pm \beta a)^2 - (n\alpha a \pm \beta b)^2 \\ n(\beta a - \alpha b)^2 - (\beta b - n\alpha a)^2 \end{matrix}\right\} = -(n\alpha^2 - \beta^2)(na^2 - b^2) = \mp R;$$

ferner ist, wenn man in $n(\alpha b + \beta a)^2 - (n\alpha a + \beta b)^2 = -(n\alpha^2 - \beta^2)(na^2 - b^2)$
$a = \alpha$ und $b = \beta$ setzt $n \cdot (2\alpha\beta)^2 - (n\alpha^2 + \beta^2) = -(n\alpha^2 - \beta^2)^2 = -1$,
und wenn man γ für $2\alpha\beta$, δ für $n\alpha^2 + \beta^2$ schreibt, $n\gamma^2 - \delta^2 = -1$, mithin

$$\left.\begin{matrix} n(\gamma b \pm \delta a)^2 - (n\gamma a \pm \delta b)^2 \\ n(\delta a - \gamma b)^2 - (\delta b - n\gamma a)^2 \end{matrix}\right\} = -(n\gamma^2 - \delta^2)(na^2 - b^2) = \pm R.$$

II) Sind α und β die kleinsten positiven ganzen Zahlen, welche der Gleichung

$$nx^2 - y^2 = -1$$

genügen, und ist $na^2 - b^2 = \pm R$, so ist auch

$$\left.\begin{matrix} n(\alpha b \pm \beta a)^2 - (n\alpha a \pm \beta b)^2 \\ n(\beta a - \alpha b)^2 - (\beta b - n\alpha a)^2 \end{matrix}\right\} = -(n\alpha^2 - \beta^2)(na^2 - b^2) = \pm R.$$

Von dem letzteren Satze haben wir schon eine Anwendung gemacht, ebenso von folgendem, der in ihm als besonderer Fall enthalten ist: „Wenn $3a^2 - b^2 = \pm R$, so ist auch $3(2a + b)^2 - (3a + 2b)^2 = \pm R$". Für $R = -1$, bezw. $= 2$ ergeben sich hieraus zwei Reihen von Näherungswerten:

$$\frac{2}{1}, \frac{7}{4}, \frac{26}{15}, \frac{97}{56}, \frac{362}{209}, \frac{1351}{780}, \ldots > \sqrt{3} \text{ (s. o.) und } \frac{1}{1}, \frac{5}{3}, \frac{19}{11}, \frac{71}{41}, \frac{265}{153}, \frac{989}{571}, \ldots < \sqrt{3}.$$

Von diesen Näherungswerten sind nachgewiesen $\frac{26}{15}$ bei **Heron**[23]) und seinen Nachahmern[24]), $\frac{7}{4}$ bei **Heron**[25]), $\frac{5}{3}$ bei demselben[26]), dann bei **Archimedes**[27]) $\frac{265}{153}$ und $\frac{1351}{780}$. Dass letzterer $\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}$ setzt, während man entweder $\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{989}{571}$ oder $\frac{362}{209} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}$ erwarten sollte, hat schon **Gauss**[28]) gegen **Mollweide** eingewendet, der dieselben Reihen von Näherungswerten auf anderem Wege gefunden hatte[29]), dazu aber selbst bemerkt, dass wahrscheinlich die Rücksicht auf eine sich darbietende Vereinfachung der weiteren Rechnung zu dieser Unregelmässigkeit geführt hätte. Mit Einwand und Gegeneinwand werde ich mich an einer späteren Stelle befassen.

Gegen **Tannery**'s Ableitung dieser Näherungswerte würde einzuwenden sein, dass es Bedenken hat, zur Erklärung des **Archimedes Diophant** heranzuziehen, der ein halbes Jahrtausend später gelebt hat und mit Zahlen ganz anders als die alten Geometer umgegangen ist[30]).

Wenn man übrigens von der allgemeinen Aufgabe $na^2 - b^2 = \pm R$ und ihrer Lösung absieht, für die Lösungen der Aufgabe $3a^2 - b^2 = \pm R$ wäre ein geometrischer Beweis nach Analogie des für die Lösung der Gleichung $2a^2 - b^2 = \pm R$ gegebenen ohne Schwierigkeit, wenn auch die Figur unbequem sein würde. Es ist mir aber überhaupt unwahrscheinlich, das für $\sqrt{3}$ auf einem ähnlichen Wege wie für $\sqrt{2}$ Näherungswerte gefunden worden sind. Ehe man solche suchte, musste man die Irrationalität erkannt haben, und gerade die Versuche, die Irrationalität zu beweisen, mussten aul Näherungsverfahren führen. Nun findet sich bei **Plato** die Notiz, dass sein Lehrer in der Mathematik, **Theodoros von Kyrene**, die Irrationalität der Quadratwurzel aus 3, aus 5 und so fort bis 17 bewiesen habe[31]). Hieraus geht unzweifelhaft hervor, dass die Irrationalität von $\sqrt{2}$ schon früher bekannt war[32]), und mit grosser Wahrscheinlichkeit, dass die Irrationalität der gedachten Quadratwurzeln anders als die von $\sqrt{2}$, aber nach gemeinsamer Methode bewiesen wurde. Wollte man gleichwohl annehmen, dass für $\sqrt{3}$ bis $\sqrt{17}$ Näherungswerte auf ähnlichem Wege wie für $\sqrt{2}$ gefunden

wären, so käme man auf Lehrsätze, deren Beweis in einer Figur undenkbar wäre, z. B. für $\sqrt{13}$ auf:

„Wenn $13a^2 - b^2 = \pm R$ ist, so ist $\left\{\begin{matrix} 13(18a \pm 5b)^2 - (65a \pm 18b)^2 \\ 13(5b - 18a)^2 - (18b - 65a)^2 \end{matrix}\right\} = \pm R$".

(5 und 18 kleinste Werte für $13a^2 - b^2 = 1$)

Ich kann aber nicht von dem Gedanken lassen, dass die Griechen der älteren Periode beim Ausziehen der Quadratwurzel von geometrischen Betrachtungen ausgegangen sind, bei denen sie bedacht waren, die gesuchte Quadratwurzel Schritt für Schritt in immer engere Grenzen einzuschliessen. Eine solche geometrische Grundlage zu schaffen, werde ich zunächst am Beispiel der $\sqrt{3}$ versuchen.

Auch für den Griechen hatte es keine Schwierigkeit, zu erkennen, dass das Rechteck $3 \cdot 1$ kleiner als das Quadrat $2 \cdot 2$ und grösser als das Quadrat $1 \cdot 1$ ist, und zwar näher dem Quadrat $2 \cdot 2$. Zu diesem Quadrat fehlt dem Rechteck $3 \cdot 1 = 2 \cdot 1\frac{1}{2}$ das Rechteck $2 \cdot \frac{1}{2}$ (Fig. IIIa). Halbiere ich die kürzere Seite des letzteren, so erhalte ich zwei kongruente Rechtecke, jedes gleich $2 \cdot \frac{1}{4}$. Konstruiere ich (Fig. III b) einen Gnomon[33]) aus denselben, und zwar so, dass sie sich mit einer Fläche $= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$ decken, so erhalte ich als Ergänzung des Gnomons zum Quadrat $2 \cdot 2$ ein Quadrat mit der Seite $2 - \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$. Dieses Quadrat ist also grösser als das Rechteck $2 \cdot 1\frac{1}{2} = 3$ um jenes Quadrätchen $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$. Dagegen ist das Quadrat mit der Seite $2 - \frac{1}{3}$ kleiner als 3, was ich geometrisch beweisen werde. Hätte ich — überall ganze Zahlen vorausgesetzt — allgemein $a^2 > m > (a-1)^2$ gefunden, also $m = a^2 - b$, wo $b < 2a - 1$, so könnte ich b als ein Rechteck aus den Seiten a und $\frac{b}{a}$ darstellen und dieses wieder als die Summe zweier kongruenter Rechtecke mit den Seiten a und $\frac{b}{2a}$, wo $\frac{b}{2a} < 1$, da $b < 2a - 1$. Der echte Bruch $\frac{b}{2a}$ ist dann zwischen zwei Stammbrüchen eingeschlossen, $\frac{1}{z} \leq \frac{b}{2a} < \frac{1}{z-1}$, wo $z \geq 2$. Ich behaupte nun, dass $\left(a - \frac{1}{z}\right)^2 > a^2 - b > \left(a - \frac{1}{z-1}\right)^2$ ist. Den ersteren Teil der Behauptung zu beweisen, macht keine Schwierigkeit: ist $\frac{1}{z} = \frac{b}{2a}$, so ist das Quadrat über $a - \frac{1}{z}$ grösser als $a^2 - b$ um das Quadrat über $\frac{b}{2a}$; ist aber $\frac{1}{z} < \frac{b}{2a}$, so ist $a - \frac{1}{z} > a - \frac{b}{2a}$, und $\left(a - \frac{1}{z}\right)^2 > \left(a - \frac{b}{2a}\right)^2$, mithin $> a^2 - b$. Etwas umständlicher ist der Beweis für den zweiten Teil des Satzes. Nach Voraussetzung ist $\frac{1}{z-1} > \frac{b}{2a}$, genauer, da 2a mindestens $= (z-1)\,b + 1$ ist, $\frac{1}{z-1} \geq \frac{b}{2a-1}$. Setze ich nun $\frac{1}{z-1} = \frac{b}{2a-1}$, so ist $\left(a - \frac{1}{z-1}\right)^2 = \left(a - \frac{b}{2a-1}\right)^2 = a^2 - 2a \cdot \frac{b}{2a-1} + \left(\frac{b}{2a-1}\right)^2$. Das Rechteck $2a \cdot \frac{b}{2a-1}$ vergleiche ich mit dem Rechteck b, indem ich letzteres in ein solches mit den Seiten $2a - 1$ und $\frac{b}{2a-1}$ verwandle: der Unterschied ist ein Rechteck mit den Seiten $\frac{b}{2a-1}$ und 1. Es ist demnach $\left(a - \frac{b}{2a-1}\right)^2$

$= a^2 - b - \frac{b}{2a-1} \cdot 1 + \frac{b}{2a-1} \cdot \frac{b}{2a-1}$. Nun ist nach Voraussetzung $b < 2a - 1$, also $\frac{b}{2a-1} < 1$ und $\frac{b}{2a-1} \cdot \frac{b}{2a-1} < \frac{b}{2a-1} \cdot 1$, daher $\left(a - \frac{b}{2a-1}\right)^2 < a^2 - b$ Für den Fall $\frac{1}{z-1} > \frac{b}{2a-1}$ ist $a - \frac{1}{z-1} < a - \frac{b}{2a-1}$, mithin noch $< \sqrt{a^2 - b}$. Für unser Beispiel ist hierdurch $2 - \frac{1}{4} > \sqrt{3} > 2 - \frac{1}{3}$ oder $\frac{7}{4} > \sqrt{3} > \frac{5}{3}$ bewiesen.

Ausgegangen war von $2 > \sqrt{3}$; von $2 - \frac{1}{3} < \sqrt{3}$ gehen wir jetzt weiter, um die obere Grenze enger zu ziehen als $2 - \frac{1}{4}$. Zunächst ist $\frac{1}{3}$ als neue Einheit anzusehen, also $5 < 3\sqrt{3}$ zu setzen und für $3\sqrt{3} = \sqrt{27}$ eine weitere Annäherung zu suchen. Man findet $5 + \frac{1}{5} > \sqrt{5^2 + 2} > 5 + \frac{1}{6}$, mithin $2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} > \sqrt{3} > 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 6}$ oder $\frac{26}{15} > \sqrt{3} > \frac{31}{18}$, unter Anwendung des leicht zu beweisenden, dem obigen analogen Satzes, dass, wenn $\frac{1}{z} \geqq \frac{b}{2a} > \frac{1}{z+1}$, $\left(a + \frac{1}{z}\right)^2 > a^2 + b > \left(a + \frac{1}{z+1}\right)^2$ ist. Die folgende Annäherung ergiebt sich aus $26 > 15\sqrt{3}$, nämlich $26 - \frac{1}{52} > \sqrt{26^2 - 1} > 26 - \frac{1}{51}$, oder $2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 52} > \sqrt{3} > 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 51}$, also $\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}$.

Diese Methode gibt unmittelbar die Archimedische Ungleichung und bis auf $\frac{12}{7}$[34]) alle Näherungswerte, deren Vorkommen nachgewiesen ist, und nur einen, $\frac{31}{18}$, der bei den Griechen nicht nachweisbar ist, den ich aber bei den Indern nachweisen zu können glaube (vergl B,III.)

Den Wert $\frac{12}{7}$, der im Mittelalter wiederkehrt[35]), kann man sich auf folgende Weise gefunden denken. Konstruiert man ein rechtwinkliges Dreieck aus der Hypotenuse $= 8$ und einer Kathete $= 4$, so ist die andere Kathete $= 7$, entsprechend $\frac{7}{4} = \sqrt{3}$; verlängert man die Kathete 4 um die Hypotenuse 8, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 7 und 12, und zwar liegt der Kathete 7 ein Winkel von 30° gegenüber, es ist also $\frac{12}{7} = \sqrt{3}$.

Was nun die aus der abgeleiteten Methode sich ergebenden Näherungswerte angeht, so sind diejenigen, von und zu denen die Rechnung fortschreitet, von den isoliert stehenden zu unterscheiden, in dem behandelten Beispiel $2 > \sqrt{3}$, $2 - \frac{1}{3} < \sqrt{3}$, $2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} > \sqrt{3}$, $2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 51} < \sqrt{3}$ von $1 < \sqrt{3}$, $2 - \frac{1}{4} > \sqrt{3}$, $2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 6} < \sqrt{3}$, $2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 52} > \sqrt{3}$. Jene lassen sich in eine Teilbruchreihe oder in einen aufsteigenden Kettenbruch zusammenfassen, in

$$a - \cfrac{1 - \cfrac{1 - \cfrac{1 - \ldots}{d}}{c}}{b} = a - \frac{1}{b} + \frac{1}{bc} - \frac{1}{bcd} + \ldots$$

aber, wofür $\sqrt{5}$ ein Beispiel sein wird, in

$$a + \frac{1}{b} - \frac{1}{bc} + \frac{1}{bcd} - \dots \quad = \quad a + \cfrac{1 - \cfrac{1 - \cfrac{1 - \dots}{d}}{c}}{b}$$

Hier ist der Punkt, in dem meine Methode sich mit der **Radicke**'s berührt[36]).

IV. Die Quadratwurzel aus 5.

Das Verhältnis des grösseren Abschnitts einer nach dem goldenen Schnitt geteilten Strecke zur ganzen Strecke steht in inniger Beziehung zu $\sqrt{5}$, denn wenn

$$a : x = x : (a - x) \;, \quad \text{so ist} \quad x : a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \;.$$

Wenn die von **Hultsch** aufgestellte Reihe durch Multiplikation jedes Gliedes mit $\frac{21}{34}$ erklärt wird, so ist

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{21}{34} \;, \quad \text{also} \quad \sqrt{5} = \frac{38}{17}.$$[37])

Setze ich aber für $x : a$ der Reihe nach $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}$ ein, so erhalte ich für $\sqrt{5}$ eine Reihe von Näherungswerten $2, \frac{7}{3}, \frac{11}{5}, \frac{9}{4}, \frac{29}{13}, \frac{47}{21}, \frac{38}{17}$, deren Genauigkeit eine wachsende ist: $\frac{7}{3} > \frac{9}{4} > \frac{47}{21} > \sqrt{5} > \frac{38}{17} > \frac{29}{13} > \frac{11}{5} > 2$. Die Werte $\frac{7}{3}$ und $\frac{47}{21}$ entsprechen der Gleichung $a^2 - 5b = 4$, $\frac{11}{5}$ und $\frac{29}{13}$ der Gleichung $a^2 - 5b = -4$, $\frac{2}{1}$ und $\frac{38}{17}$ der Gleichung $a^2 - 5b = -1$, endlich $\frac{9}{4}$ der Gleichung $a^2 - 5b = 1$. Es waren nämlich $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}$ als Lösungen der Gleichung $a(a - b) = b^2 \pm 1$ gefunden und $\sqrt{5}$ ist aus $(2b + a) : a$ abgeleitet. Allgemein findet man daher $(2b + a)^2 - 5a^2 = -4(a^2 - ab - b^2) = \mp 4$; ist aber a eine gerade Zahl, $= 2m$, so reduciert sich $(2b + a) : a$ auf $(b + m) : m$, und man hat $(b + m)^2 - 5m^2 - = b^2 + b \cdot 2m - 4m^2 = -(a^2 - ab - b^2) = \mp 1$.

Dass man für $\sqrt{5}$ Näherungswerte aus denen für $a(a - b) = b^2 \mp 1$ gefunden hat, ist mir nun ebenso unwahrscheinlich, als dass man letztere aus ersteren berechnet hat. Denn beide Annahmen führen auf $2\frac{1}{3} > 2\frac{1}{4} > \sqrt{5}$; dass neben $2\frac{1}{4} > \sqrt{5}$ aber $2\frac{1}{3} > \sqrt{5}$ als Näherungswert habe gelten können, wird wohl Niemand zugestehen.

Wollte man für $\sqrt{5}$ nach der von mir entwickelten Methode Näherungswerte ableiten, so würde man

$$3 > \sqrt{5} > 2 \;, \quad 2 + \frac{1}{4} > \sqrt{5} > 2 + \frac{1}{5} \;, \quad 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4 . 18} > \sqrt{5} > 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4 . 17},$$

also

$$3 > \frac{9}{4} > \frac{161}{72} > \sqrt{5} > \frac{38}{17} > \frac{11}{5} > 2$$

finden.

Von diesen Werten sind 2 und $\frac{11}{5}$ als Heronisch von **Tannery**[38]) nachgewiesen.

$= a^2 - b - \frac{b}{2a-1} \cdot 1 + \frac{b}{2a-1} \cdot \frac{b}{2a-1}$. Nun ist nach Voraussetzung $b < 2a - 1$, also $\frac{b}{2a-1} < 1$ und $\frac{b}{2a-1} \cdot \frac{b}{2a-1} < \frac{b}{2a-1} \cdot 1$, daher $\left(a - \frac{b}{2a-1}\right)^2 < a^2 - b$ Für den Fall $\frac{1}{z-1} > \frac{b}{2a-1}$ ist $a - \frac{1}{z-1} < a - \frac{b}{2a-1}$, mithin noch $< \sqrt{a^2 - b}$. Für unser Beispiel ist hierdurch $2 - \frac{1}{4} > \sqrt{3} > 2 - \frac{1}{3}$ oder $\frac{7}{4} > \sqrt{3} > \frac{5}{3}$ bewiesen.

Ausgegangen war von $2 > \sqrt{3}$; von $2 - \frac{1}{3} < \sqrt{3}$ gehen wir jetzt weiter, um die obere Grenze enger zu ziehen als $2 - \frac{1}{4}$. Zunächst ist $\frac{1}{3}$ als neue Einheit anzusehen, also $5 < 3\sqrt{3}$ zu setzen und für $3\sqrt{3} = \sqrt{27}$ eine weitere Annäherung zu suchen. Man findet $5 + \frac{1}{5} > \sqrt{5^2 + 2} > 5 + \frac{1}{6}$, mithin $2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} > \sqrt{3} > 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 6}$ oder $\frac{26}{15} > \sqrt{3} > \frac{31}{18}$, unter Anwendung des leicht zu beweisenden, dem obigen analogen Satzes, dass, wenn $\frac{1}{z} \geqq \frac{b}{2a} > \frac{1}{z+1}$, $\left(a + \frac{1}{z}\right)^2 > a^2 + b > \left(a + \frac{1}{z+1}\right)^2$ ist. Die folgende Annäherung ergiebt sich aus $26 > 15\sqrt{3}$, nämlich $26 - \frac{1}{52} > \sqrt{26^2 - 1} > 26 - \frac{1}{51}$, oder $2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 52} > \sqrt{3} > 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 51}$, also $\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}$.

Diese Methode gibt unmittelbar die Archimedische Ungleichung und bis auf $\frac{12}{7}$[34]) alle Näherungswerte, deren Vorkommen nachgewiesen ist, und nur einen, $\frac{31}{18}$, der bei den Griechen nicht nachweisbar ist, den ich aber bei den Indern nachweisen zu können glaube (vergl B,III.)

Den Wert $\frac{12}{7}$, der im Mittelalter wiederkehrt[35]), kann man sich auf folgende Weise gefunden denken. Konstruiert man ein rechtwinkliges Dreieck aus der Hypotenuse = 8 und einer Kathete = 4, so ist die andere Kathete = 7, entsprechend $\frac{7}{4} = \sqrt{3}$; verlängert man die Kathete 4 um die Hypotenuse 8, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 7 und 12, und zwar liegt der Kathete 7 ein Winkel von 30° gegenüber, es ist also $\frac{12}{7} = \sqrt{3}$.

Was nun die aus der abgeleiteten Methode sich ergebenden Näherungswerte angeht, so sind diejenigen, von und zu denen die Rechnung fortschreitet, von den isoliert stehenden zu unterscheiden, in dem behandelten Beispiel $2 > \sqrt{3}$, $2 - \frac{1}{3} < \sqrt{3}$, $2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} > \sqrt{3}$, $2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 51} < \sqrt{3}$ von $1 < \sqrt{3}$, $2 - \frac{1}{4} > \sqrt{3}$, $2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 6} < \sqrt{3}$, $2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 52} > \sqrt{3}$. Jene lassen sich in eine Teilbruchreihe oder in einen aufsteigenden Kettenbruch zusammenfassen, in

$$a - \cfrac{1 - \cfrac{1 - \cfrac{1 - \ldots}{d}}{c}}{b} = a - \frac{1}{b} + \frac{1}{bc} - \frac{1}{bcd} + \ldots$$

aber, wofür $\sqrt{5}$ ein Beispiel sein wird, in

$$a + \frac{1}{b} - \frac{1}{bc} + \frac{1}{bcd} - \ldots \quad = \quad a + \cfrac{1 - \cfrac{1 - \cfrac{1 - \ldots}{d}}{c}}{b}$$

Hier ist der Punkt, in dem meine Methode sich mit der **Radicke**'s berührt[36]).

IV. Die Quadratwurzel aus 5.

Das Verhältnis des grösseren Abschnitts einer nach dem goldenen Schnitt geteilten Strecke zur ganzen Strecke steht in inniger Beziehung zu $\sqrt{5}$, denn wenn

$$a : x = x : (a - x), \quad \text{so ist} \quad x : a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Wenn die von **Hultsch** aufgestellte Reihe durch Multiplikation jedes Gliedes mit $\frac{21}{34}$ erklärt wird, so ist

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{21}{34}, \quad \text{also} \quad \sqrt{5} = \frac{38}{17}.$$ [37])

Setze ich aber für $x : a$ der Reihe nach $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}$ ein, so erhalte ich für $\sqrt{5}$ eine Reihe von Näherungswerten $2, \frac{7}{3}, \frac{11}{5}, \frac{9}{4}, \frac{29}{13}, \frac{47}{21}, \frac{38}{17}$, deren Genauigkeit eine wachsende ist:

$$\frac{7}{3} > \frac{9}{4} > \frac{47}{21} > \sqrt{5} > \frac{38}{17} > \frac{29}{13} > \frac{11}{5} > 2.$$

Die Werte $\frac{7}{3}$ und $\frac{47}{21}$ entsprechen der Gleichung $a^2 - 5b = 4$, $\frac{11}{5}$ und $\frac{29}{13}$ der Gleichung $a^2 - 5b = -4$, $\frac{2}{1}$ und $\frac{38}{17}$ der Gleichung $a^2 - 5b = -1$, endlich $\frac{9}{4}$ der Gleichung $a^2 - 5b = 1$. Es waren nämlich $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}$ als Lösungen der Gleichung $a(a - b) = b^2 \pm 1$ gefunden und $\sqrt{5}$ ist aus $(2b + a) : a$ abgeleitet. Allgemein findet man daher $(2b + a)^2 - 5a^2 = -4(a^2 - ab - b^2) = \mp 4$; ist aber a eine gerade Zahl, $= 2m$, so reduciert sich $(2b + a) : a$ auf $(b + m) : m$, und man hat $(b + m)^2 - 5m^2 - = b^2 + b \cdot 2m - 4m^2 = -(a^2 - ab - b^2) = \mp 1$.

Dass man für $\sqrt{5}$ Näherungswerte aus denen für $a(a - b) = b^2 \mp 1$ gefunden hat, ist mir nun ebenso unwahrscheinlich, als dass man letztere aus ersteren berechnet hat. Denn beide Annahmen führen auf $2\frac{1}{3} > 2\frac{1}{4} > \sqrt{5}$; dass neben $2\frac{1}{4} > \sqrt{5}$ aber $2\frac{1}{3} > \sqrt{5}$ als Näherungswert habe gelten können, wird wohl Niemand zugestehen.

Wollte man für $\sqrt{5}$ nach der von mir entwickelten Methode Näherungswerte ableiten, so würde man

$$3 > \sqrt{5} > 2, \quad 2 + \frac{1}{4} > \sqrt{5} > 2 + \frac{1}{5}, \quad 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4 \cdot 18} > \sqrt{5} > 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4 \cdot 17},$$

also

$$3 > \frac{9}{4} > \frac{161}{72} > \sqrt{5} > \frac{38}{17} > \frac{11}{5} > 2$$

finden.

Von diesen Werten sind 2 und $\frac{11}{5}$ als Heronisch von **Tannery**[38]) nachgewiesen.

V. Die Kreismessung des Archimedes.

Archimedes geht bei seiner Berechnung von den Ungleichungen $\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}$ aus, die wir schon behandelt haben, und setzt zunächst $r : \frac{1}{2} S_6 = \sqrt{3} > \frac{265}{153}$, wo r den Halbmesser des Kreises und S_6 die Seite des umbeschriebenen regelmässigen Sechsecks bedeutet. Für die weitere Rechnung wendet er zwei geometrische Sätze[39]) an, die in moderner Ausdrucksweise so lauten würden: „Ist r der Halbmesser eines Kreises, S_n die Seite des umbeschriebenen regelmässigen n-ecks, R_n der Halbmesser des diesem wieder umbeschriebenenen Kreises, so findet man die Seite S_{2n} des dem gegebenen Kreise umbeschriebenen 2n-ecks aus der Proportion

$$r : \frac{1}{2} S_{2n} = (r + R_n) : \frac{1}{2} S_n$$

und den Halbmesser R_{2n} des Kreises, der dem 2n-eck wieder umbeschrieben ist, aus der Gleichung

$$R_{2n}^2 = r^2 + \left(\frac{1}{2} S_{2n}\right)^2 \quad \text{oder} \quad \left(R_{2n} : \frac{1}{2} S_{2n}\right)^2 = \left(r : \frac{1}{2} S_{2n}\right)^2 + 1.\text{“}$$

Mit Hülfe dieser Sätze leitet er ab:

$$r : \frac{1}{2} S_{12} = \left(r + R_6\right) : \frac{1}{2} S_6 = \sqrt{3} + 2, \text{ also } > 2 + \frac{265}{153} \text{ oder } > \frac{571}{153}\ ; \quad R_{12} : \frac{1}{2} S_{12} > \sqrt{\frac{571^2 + 153^2}{153^2}} > \frac{591\frac{1}{8}}{153}\ ;$$

$$r : \frac{1}{2} S_{24} > \frac{571 + 591\frac{1}{8}}{153} \text{ oder } > \frac{1162\frac{1}{8}}{153}\ ; \qquad R_{24} : \frac{1}{2} S_{24} > \sqrt{\frac{(1162\frac{1}{8})^2 + 153^2}{153^2}} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153}\ ;$$

$$r : \frac{1}{2} S_{48} > \frac{1162\frac{1}{8} + 1172\frac{1}{8}}{153} \text{ oder } > \frac{2334\frac{1}{4}}{153}\ ; \qquad R_{48} : \frac{1}{2} S_{48} > \sqrt{\frac{(2334\frac{1}{4})^2 + 153^2}{153^2}} > \frac{2339\frac{1}{4}}{153}\ ;$$

$$r : \frac{1}{2} S_{96} > \frac{2334\frac{1}{4} + 2339\frac{1}{4}}{153} \text{ oder } > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}, \text{ daher } \frac{1}{2} S_{96} : r < \frac{153}{4673\frac{1}{2}} \quad \text{und}$$

$$48 S_{96} : r < \frac{153.2.96}{9347} \text{ oder } < 3\frac{1335}{9347} < 3\frac{1}{7}\ .$$

Für die einbeschriebenen regelmässigen Vielecke schlägt **Archimedes** ein Verfahren ein, das sich auf die beiden den obigen analogen Sätze zurückführen lässt:

$$\varrho_{2n} : \frac{1}{2} s_{2n} = \left(r + \varrho_n\right) : \frac{1}{2} s_n \quad \text{und} \quad \left(r : \frac{1}{2} s_{2n}\right)^2 = \left(\varrho_n : \frac{1}{2} s_{2n}\right)^2 + 1\ ,$$

wo r den Radius eines Kreises, s_n die Seite eines einbeschriebenen regelmässigen Vielecks, ϱ_n den Halbmesser des diesem wieder einbeschriebenen Kreises bezeichnet. Nun setzt er

$$r : \frac{1}{2} s_6 = 2, \ \varrho_6 : \frac{1}{2} s_6 = \sqrt{3} < \frac{1351}{780}, \text{ also}$$

$$\varrho_{12} : \frac{1}{2} s_{12} < 2 + \frac{1351}{780} \text{ oder } < \frac{2911}{780}\ ; \qquad r : \frac{1}{2} s_{12} < \sqrt{\frac{2911^2 + 780^2}{780^2}} < \frac{3013\frac{1}{4}}{780}\ ;$$

$$\varrho_{24} : \frac{1}{2} s_{24} < \frac{2911 + 3013\frac{3}{4}}{780} \text{ oder } < \frac{1823}{240}\ ; \qquad r : \frac{1}{2} s_{24} < \sqrt{\frac{1823^2 + 240^2}{240^2}} < \frac{1838\frac{9}{11}}{240}\ ;$$

$$\varrho_{48} : \frac{1}{2} s_{48} < \frac{1823 + 1838\frac{9}{11}}{240} \text{ oder } < \frac{1007}{66}\ ; \qquad r : \frac{1}{2} s_{48} < \sqrt{\frac{1007^2 + 66^2}{66^2}} < \frac{1009\frac{1}{6}}{66}\ ;$$

$$\varrho_{96} : \frac{1}{2} s_{96} < \frac{1007 + 1009\frac{1}{6}}{66} \text{ oder } < \frac{2016\frac{1}{6}}{66}\ ; \qquad r : \frac{1}{2} s_{96} < \sqrt{\frac{(2016\frac{1}{6})^2 + 66^2}{66^2}} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66}, \text{ daher}$$

$$48 s_{96} : r > \frac{66.96}{2017\frac{1}{4}} \text{ oder } > \frac{25344}{8069} > 3\frac{10}{71}\ , \qquad \text{und da } 48 S_{96} : r < 3\frac{1}{7}\ ,$$

so ist

$$3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}.$$

Während die Wahl von $3\frac{1}{7} > 3\frac{1335}{9347}$, nämlich $> 3\frac{1}{7} - \frac{1}{7}\cdot\frac{2}{9347}$ kaum einer Erklärung bedarf, die Wahl von $3\frac{10}{71} < 3\frac{1137}{8069}$ erklärt **Tannery**[40]) aus einem Verfahren, das auf die Ableitung eines zweigliedrigen Kettenbruchs herauskommen würde. Wenn ich ihn recht verstehe, so nimmt er folgendes Verfahren an:

$$3\frac{1137}{8069} = 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7}\cdot\frac{110}{8069} > 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7(7n+1)}\quad,\qquad 7n + 1 < \frac{8069}{110} \text{ oder } < 73\frac{39}{110},$$

mithin $n = 10$, denn $7n + 1 = 71 < 73\frac{39}{110}$.

Der Zweck dieses Verfahrens würde sein, einen zweiten Näherungswert

$$3\frac{1}{7} - \frac{1}{7.71} = 3\frac{10}{71}$$

in möglichst kleinen Zahlen zu erhalten, indem der Nenner des ersten Näherungsbruchs beim Vereinigen der beiden Näherungsbrüche zu **einem** Bruch gemeinsames Mass im Zähler und Nenner wird. Man könnte wohl auch das an geeigneter Stelle abgebrochene Verfahren voraussetzen, nach welchem der grösste gemeinsame Teiler zweier Zahlen, hier 1137 und 8069, gesucht wird, ein Verfahren, das vollkommen mit dem Kettenbruch-Algoritmus übereinstimmt.

Es sind Näherungswerte bestimmt worden $< r : \frac{1}{2} S_n$ und $> \varrho : \frac{1}{2} s_n$, und solche $< R_n : \frac{1}{2} S_n$ und $> r : \frac{1}{2} s_n$; da aber $r : \frac{1}{2} S_n = \varrho : \frac{1}{2} s_n$ und $R_n : \frac{1}{2} S_n = r : \frac{1}{2} s_n$ ist, so sind damit für $r : \frac{1}{2} S_n = \operatorname{cosec}\frac{180^0}{n}$ sowohl, wie für $r : \frac{1}{2} s_n = \operatorname{cotg}\frac{180^0}{n}$ obere und untere Grenzen gefunden, und zwar

$$\frac{1351}{780} > r : \frac{1}{2} S_6 > \frac{265}{153}\quad;\quad \frac{1351}{780} - \frac{265}{153} = \frac{1}{39780}\quad,\quad \text{also der Fehler} < \frac{1}{39780}$$

$$\frac{2911}{780} > r : \frac{1}{2} S_{12}^{*)} > \frac{571}{153}\quad;\quad \text{(wie vorher)}$$

$$\frac{3013\frac{5}{8}}{780} > r : \frac{1}{2} s_{12} > \frac{591\frac{1}{8}}{153}\quad;\quad \frac{24109}{8.3.260} - \frac{4729}{8.3.51} = \frac{19}{318240},\quad \text{"} \ \text{"} \ \text{"} < \frac{1}{16907}$$

$$\frac{1823}{240} > r : \frac{1}{2} S_{24} > \frac{1162\frac{1}{8}}{153}\quad;\quad \frac{1823}{240} - \frac{1162\frac{1}{8}}{153} = \frac{1}{4080}\quad,\quad \text{"} \ \text{"} \ \text{"} < \frac{1}{4080}$$

$$\frac{1838\frac{9}{11}}{240} > r : \frac{1}{2} s_{24} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153}\quad;\quad \frac{20227}{3.8.110} - \frac{9377}{3.8.51} = \frac{107}{134640},\quad \text{"} \ \text{"} \ \text{"} < \frac{1}{1258}$$

$$\frac{1007}{66} > r : \frac{1}{2} S_{48} > \frac{2334\frac{1}{4}}{153}\quad;\quad \frac{1007}{6.11} - \frac{9337}{6.102} = \frac{7}{6732}\quad,\quad \text{"} \ \text{"} \ \text{"} < \frac{1}{961}$$

$$\frac{1009\frac{1}{6}}{66} > r : \frac{1}{2} s_{48} > \frac{2339\frac{1}{4}}{153}\quad;\quad \frac{6055}{36.11} - \frac{9357}{36.17} = \frac{2}{1683}\quad,\quad \text{"} \ \text{"} \ \text{"} < \frac{1}{841}$$

$$\frac{2016\frac{1}{6}}{66} > r : \frac{1}{2} S_{96} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}\quad;\quad \frac{12097}{18.22} - \frac{9347}{18.17} = \frac{5}{2244}\quad,\quad \text{"} \ \text{"} \ \text{"} < \frac{1}{448}.$$

Diese Näherungswerte sind von einer beachtenswerten Genauigkeit; wenden wir uns nun zu der Frage, wie die in ihrer Zahl enthaltenen Quadratwurzeln berechnet worden sind. **Tannery**[41]) benutzt die Formel

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a + x,\quad \text{z. B.}\quad \sqrt{2911^2 + 780^2} = 2911 + 100 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} < 3113\frac{1}{8}.$$

---

*) $r : \frac{1}{2} s_6$ lasse ich als genau $= 2$ aus dieser Reihe fort.

Es ist möglich, aber nicht notwendig, dass **Archimed** so gerechnet hat. Die Absicht etwa, Zahlen grösser als 10 000 zu vermeiden — welche **Tannery** an anderem Orte[42]) **Archimedes** zuschreibt — kann nicht dazu bestimmt haben, denn sie wird für b^2 in dem gewählten Beispiel so wenig erreicht, wie in $\sqrt{1823^2 + 240^2}$ und denjenigen Radikanden, in denen $b^2 = 153^2$ ist. Auch können ernstliche Schwierigkeiten für das Ausziehen der Quadratwurzel für den Griechen erst bei Zahlen $> 10\,000^2$ eintreten — diese Grenze würde also für $a^2 + b^2$ einzuhalten sein — denn aus 9 801 Myriaden die Quadratwurzel auszuziehen oder dieselbe für 8 407 Myriaden in Hundertern näherungsweise zu bestimmen, macht kaum grössere Mühe, als dieselbe Aufgabe für 9 801, bezw. 8 407 Einer. Von einiger Bedeutung für die Beurteilung dieser Frage dürfte sein, dass gerade **Archimedes** zum unbegrenzten Aufbau des dekadischen Zahlensystems fortgeschritten ist, dazu noch $10\,000^2$ als Einheit der höheren Ordnungen genommen hat[43]). Mag nun auch $1313 < \sqrt{2\,911^2 + 780^2}$ aus $2\,911 + 100 + 2$ oder aus $3\,000 + 100 + 10 + 3$ berechnet worden sein, von wesentlicher Bedeutung ist erst die weitere Annäherung. Stellen wir zur Untersuchung dieser Frage zunächst die Quadratwurzeln übersichtlich zusammen: es handelt sich darum, für

$$1)\ 591 < \sqrt{591^2 + 169}, \qquad 2)\ 1\,172 < \sqrt{1\,172^2 + 359\tfrac{33}{66}},$$
$$3)\ 2\,339 < \sqrt{2339^2 + 1\,211\tfrac{1}{16}},^{44)} \qquad 4)\ 3\,014 > \sqrt{3\,014^2 - 1\,875},$$
$$5)\ 1\,839 > \sqrt{1\,839^2 - 992}, \qquad 6)\ 1\,009 < \sqrt{1\,009^2 + 324},$$
$$7)\ 2\,017 < \sqrt{2\,017^2 + 995\tfrac{1}{36}}$$

eine grössere Annäherung zu finden. **Tannery**, der zur Erklärung der Heronischen Wurzeln $\sqrt{a^2 - b} = a - \frac{b}{2a}$ selbst heranzieht[45]), benutzt für (4) und (5) die Annäherung nach der Formel $\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a}$, nämlich

$$4)\ 3013 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} > \sqrt{\left(3\,013\tfrac{1}{2}\right)^2 + 1138\tfrac{3}{4}} \quad \text{und} \quad 5)\ 1838 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} > \sqrt{\left(1838\tfrac{1}{2}\right)^2 + 846\tfrac{3}{4}}\ ;$$

ich ziehe $4)\ 3\,014 - \frac{1}{4} > \sqrt{3\,014^2 - 1875}$ und $5)\ 1839 - \frac{1}{4} > \sqrt{1839^2 - 992}$ vor, da diese Ableitung einfacher ist und für 4) unmittelbar den Archimedischen Wert liefert. Für die anderen Wurzeln finde ich in Uebereinstimmung mit **Tannery**[46])

$$(1)\ 591 + \tfrac{1}{7} < \sqrt{591^2 + 169},\ (2)\ 1\,172 + \tfrac{1}{7} < \sqrt{1\,172^2 + 359\tfrac{33}{64}},\ (3)\ 2\,339 + \tfrac{1}{4} < \sqrt{2\,339^2 + 1\,211\tfrac{1}{16}},$$
$$(6)\ 1009 + \tfrac{1}{6} > \sqrt{1009^2 + 324}\ ,\ (7)\ 2\,017 + \tfrac{1}{4} > \sqrt{2\,017^2 + 995\tfrac{1}{36}}\ .$$

Mit den Archimedischen Werten stimmen wohl die drei letzten, aber nicht die beiden ersten überein. **Archimed** hat $591\frac{1}{8}$ und $1\,172\frac{1}{8}$, beide Male $\frac{1}{8}$ statt $\frac{1}{7}$, wobei er allerdings der Bedingung genügt, unter dem wahren Wert zu bleiben, da $\frac{1}{8} < \frac{1}{7}$ ist. Die Wahl von $1172\frac{1}{8}$ statt des genaueren $1172\frac{1}{7}$ liesse sich wohl, wenn nur erst die Wahl von $591\frac{1}{8}$ für $591\frac{1}{7}$ erklärt wäre, aus Rücksichtnahme auf eine Vereinfachung der weiteren Rechnung erklären[47]), da die Summe von $1\,162\frac{1}{8} + 1\,172\frac{1}{8} = 2334\frac{1}{4}$ zu bilden ist, dann das Quadrat von $2\,334\frac{1}{4}$ auftritt, man aber sehr leicht $2 \cdot 2\,334.\frac{1}{4} = 1167$ findet und $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ vernachlässigen kann. Aber es

bleibt die Schwierigkeit, die Wahl von $591\frac{1}{8}$ an Stelle von $591\frac{1}{7}$ zu erklären; denn hier ist zunächst die Summe von $571 + 591\frac{1}{8} = 1162\frac{1}{8}$ zu bilden, dann tritt das Quadrat von $1162\frac{1}{8}$ auf, ist also $2 \cdot 1162 \cdot \frac{1}{8} = 290\frac{1}{2}$ zu bilden, wobei $\left(\frac{1}{8}\right)^2$ vernachlässigt werden kann: aber für $571 + 591\frac{1}{7} = 1162\frac{1}{7}$ würde unter Vernachlässigung von $\left(\frac{1}{7}\right)^2$ sich das Produkt $2 \cdot 1162 \cdot \frac{1}{7} = 2 \cdot 166 = 332$ noch leichter ergeben; soll man annehmen, dass **Archimedes** die Teilbarkeit von 1162 durch 7 nicht bemerkt hat? Für $1162\frac{1}{7}$ würde 2) übergehen in $1172 < \sqrt{1172^2 + 401 + \left(\frac{1}{49}\right)}$, man erhielte daher $1172\frac{1}{6} < \sqrt{1172^2 + 401}$ und $r : \frac{1}{2} S_{48} > 1162\frac{1}{7} + 1172\frac{1}{6}$; für $\frac{1}{7} + \frac{1}{6} = \frac{13}{42}$ liesse sich dann freilich ein anderer kleiner Bruch als $\frac{1}{4}$ kaum wählen, wenn man den die weitere Rechnung erschwerenden Bruch $\frac{2}{7}$ vermeiden will.

Während **Archimedes** in der ersten Reihe seiner Näherungswerte 153 als Einheit beibehält, wechselt er in der zweiten Reihe die Einheit zweimal. Das erste Mal setzt er $\frac{5924\frac{3}{4}}{780} = \frac{1823}{240}$, das zweite Mal $\frac{3661\frac{9}{11}}{240} = \frac{1007}{66}$. Dass die Scheu vor Zahlen, die eine Myriade überschreiten, ihn dazu bestimmt habe, lässt sich wohl für sein erstes Vorgehen vorbringen, aber nicht für sein zweites; hier hätte er ruhig seine Rechnung zu Ende führen können, bis zu $r : \frac{1}{2} s_{96}$, ohne 10 000 zu erreichen. Es lässt sich daher nur feststellen, dass **Archimedes** überhaupt kleinere Zahlen erhalten wollte. Die erste Vereinfachung ergibt sich aus unserer Berechnung von $\sqrt{2911^2 + 780^2} < 3014 - \frac{1}{4}$ ungezwungen. Anders verhält es sich mit $\frac{1007}{66}$ für $\frac{3661\frac{9}{11}}{240}$, wo wir in Uebereinstimmung mit **Tannery** $r : \frac{1}{2} s_{24} < 1838\frac{3}{4}$, mithin $\varrho_{48} : \frac{1}{2} s_{48} < 3661\frac{3}{4}$ finden. Warum **Archimed** gerade den Faktor 40 der Einheit 240 hätte unterdrücken wollen[48], will mir nicht einleuchten. Mir scheint näher zu liegen,

$$\frac{3661\frac{3}{4}}{240} = 15\frac{247}{960} = 15 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4} \cdot \frac{7}{80} < 15 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 11} \quad \text{oder}$$

$$= 15 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{240} < 15 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 34} < 15 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 33} \quad \text{anzunehmen,}$$

wo $\frac{1}{33} > \frac{1}{34}$ aus ähnlichen Gründen gesetzt sein würde, wie oben $3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7 \cdot 71}$ statt $3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7 \cdot 73}$.

Wir haben gesehen, dass die erste Vereinfachung sich nach unserer Ableitung **Archimed** von selbst bot, dass er die zweite Vereinfachung sich erzwang; nehmen wir hinzu, dass er eine andere sich darbietende Vereinfachung, nämlich $\frac{1033}{136}$ für $\frac{1162\frac{1}{8}}{153} < r : \frac{1}{2} S_{24}$ nicht benutzte, so scheint mir die Annahme unbegründet, dass **Archimed** $\frac{1351}{780} > \sqrt{3}$ statt $\frac{362}{209} > \sqrt{3}$ um jener ersten Vereinfachung willen gewählt hätte (S. 6).

VI. Die Heronischen Näherungswerte.

In den Schriften **Heron**'s von **Alexandria** findet sich eine ziemliche Anzahl quadratischer Irrationalitäten ausgewertet, wobei nur zu bedauern ist, dass die Genauigkeit der Annäherung eine sehr ungleiche, zuweilen eine durchaus unzulängliche ist. Vielfach war es **Heron** um praktische Zwecke zu tun, bei denen er mit einer oberflächlichen Schätzung sich begnügen zu dürfen glaubte. Wir werden sehen, wie weit er in der Vernachlässigung von Fehlern gieng, wie wenig eine feste Methode befolgte. Darum möchte ich doch nicht ohne Weiteres annehmen, dass eine solche feste Methode auch für wissenschaftliche Untersuchungen nicht bestanden habe.

Neuerdings hat **Tannery** die Heronischen Werte einer besonderen Untersuchung[49]) unterzogen, dem Ergebnisse **Günther** in seine oft citierte Schrift aufgenommen hat[50]). Im folgenden bezieht die erste beigesetzte Zahl sich auf **Tannery**'s, die zweite auf **Günther**'s Zählung Der Heronische Wert ist jeder Wurzel beigefügt, ebenso **Tannery**'s Erklärung. Ich unterscheide nach dem Grad der Annäherung vier Gruppen Die erste Gruppe umfasst die sich auf eine erste Annäherung beschränkenden Werte und zerfällt in zwei Abteilungen, bei deren erster die Annäherung in **einem** Stammbruch gefunden wird[51]).

(1) (45) $\sqrt{63} = 8 - \frac{1}{16}$, (4) (47) $\sqrt{50} = 7\frac{1}{14}$,

(18) (61) $\sqrt{720} = 26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ aus $27 - \frac{9}{54} = 27 - \frac{1}{6}$, **Tannery** aus $26\frac{1}{2} + \frac{17\frac{3}{4}}{53} > 26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$, d h. durch Annäherung II. Grades;

(6 (49) $\sqrt{58\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{16}} = 7\frac{2}{3}$ aus $8 - \frac{5\frac{1}{16}}{16} > 8 - \frac{1}{3}$, T. aus $7 + \frac{9\frac{7}{16}}{16} < 7\frac{2}{3}$,

(7) (50) $\sqrt{444\frac{1}{3}\frac{1}{9}} = 21\frac{1}{12}$ aus $21 + \frac{3\frac{4}{9}}{42}$ (T.),

(8) (51) $\sqrt{3400} = 58\frac{1}{3}$ aus $58 + \frac{36}{116}$ (T.),

(9) (52) $\sqrt{54} = 7\frac{1}{3}$ aus $7 + \frac{5}{14} > 7 + \frac{5}{15}$ (T.),

(16) (59) $\sqrt{356} = 18\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8}$ aus $19 - \frac{5}{38} < 19 - \frac{1}{8}$; T. aus $18 + \frac{1}{2} + \frac{13\frac{3}{4}}{37} = 18 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{296}\right)$, also durch Zerfällung der zweiten Annäherung $\frac{13\frac{3}{4}}{37}$ in Stammbrüche unter Vernachlässigung des letzten,

(17) (60) $\sqrt{5000} = 70\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ aus $71 - \frac{41}{142} < 71 - \frac{1}{4}$; T. aus $70\frac{1}{2} + \frac{29\frac{1}{4}}{141} = 70\frac{1}{2}\frac{1}{4}$, also wie (18) durch zweite Annäherung.

Während für (1), (4) und (18) in $\sqrt{a^2+b}$ der Rest $b = 1$ war, ein Stammbruch sich daher von selbst ergab*), musste für (6), (7), (8), (9), (16), (17) ein solcher erst bestimmt werden, indem man den Nenner durch den Zähler dividierte. Auffallend ist neben

(16) (59) $\sqrt{356} = 18\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8}$ (15) (58) $\sqrt{356\frac{1}{18}} = 18\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{9}$, d. h. $\sqrt{356\frac{1}{18}} < \sqrt{356}$;

---

*) aus einer ersten Annäherung erklärt sich auch leicht die rationale Quadratwurzel aus $167\frac{1}{169}$, nämlich $13 - \frac{1}{13}$. (Günther S. 110, 111).

T. erklärt (15) aus $18\frac{1}{2} + \frac{13\frac{29}{36}}{37} = 18\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \left(\frac{1}{111} + \frac{1}{333}\right)$.

Ein besonderes Interesse hat (17) (60) $\overline{5000}$, da diese Wurzel im Talmud vorkommt[52]), wo $70\frac{2}{3} < \sqrt{5000}$ angegeben wird; in der Tat ist $71 - \frac{1}{4} > \sqrt{71^2 - 41} > 71 - \frac{1}{3}$. In der zweiten Abteilung ist die Annäherung ersten Grades in eine Summe von Stammbrüchen aufgelöst (T.):

$$(2)\ (45)\ \sqrt{1125} = 33 + \frac{36}{66} = 33\frac{1}{2}\frac{1}{22}, \qquad (3)\ (46)\ \sqrt{1081} = 32 + \frac{57}{64} = 32\ \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{64},$$

$$(5)\ (48)\ \sqrt{75} = 8 + \frac{11}{16} = 8\ \frac{1}{2}\frac{1}{8}\frac{1}{16}.$$

Dazu ist zu bemerken, dass (2) (45) $34 - \frac{1}{2} + \frac{2\frac{1}{4}}{67} < 33\frac{1}{2}\frac{1}{24}$

(3) (46) $33 - \frac{8}{66} > 33 - \frac{1}{8}$ oder $> 32\ \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8}$ (5) (48) $9 - \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3}$

genauere Werte sein würden.

In die zweite Gruppe verweise ich

(13) (56) $\sqrt{1575} = 39\frac{2}{3}\frac{1}{51}$ aus $40 - \frac{1}{3} + \frac{1\frac{5}{9}}{79\frac{1}{3}} = 40 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 17}$, T. aus $39\frac{2}{3} + \frac{1}{51}$,

(14) (57) $\sqrt{216} = 14\frac{2}{3}\frac{1}{33}$ aus $15 - \frac{1}{3} + \frac{\frac{8}{9}}{29\frac{1}{3}} = 15 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 11}$, T. aus $14\frac{2}{3} + \frac{1}{33}$,

(19) (62) $\sqrt{208} = 14\frac{1}{3}\frac{1}{12}$ aus $14 + \frac{1}{2} - \frac{2\frac{1}{4}}{29} = 14 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{58} > 14 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 6}$, T aus $14 + \frac{1}{3} + \frac{2\frac{5}{9}}{28\frac{2}{3}} > 14 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$,

(22) (65) $\sqrt{886 - \frac{1}{16}} = 29\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{68}$ aus $30 - \frac{1}{4} + \frac{\frac{7}{8}}{59\frac{1}{2}} = 30 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 17}$,

T. aus $29 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{7}{8} : 59\frac{1}{2} = 29\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{68}$ durch 3te Annäherung,

(23) (66) $\sqrt{108} = 10\frac{1}{3}\frac{1}{15}$ aus $10 + \frac{1}{2} - \frac{2\frac{1}{4}}{21} = 10 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{14} < 10 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 5}$, T. aus $6\sqrt{3} = 6 \cdot \frac{26}{15}$.

(20) (63) $\sqrt{43\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{9}} = 6\frac{1}{2}\frac{1}{9}$ aus $6 + \frac{1}{2} + \frac{1\frac{1}{18}}{13} = 6\frac{1}{2} + \frac{1}{9}$ (T.),

(11) (54) $\sqrt{43\frac{1}{2}\frac{1}{4}} = 6\frac{1}{2}\frac{1}{13}\frac{1}{26}$ aus $6\frac{1}{2} + \frac{1\frac{1}{2}}{13} = 6\frac{1}{2} + \frac{1}{13} + \frac{1}{26}$ (T.),

(15) (58) $\sqrt{356\frac{1}{18}}$ s. o.

In diesen Beispielen erscheint bei (13) und (14) die zweite Annäherung sofort als Stammbruch, bei (19), (22), (23) wird sie in einen solchen umgewandelt, der ein aliquoter Teil des ersten Stammbruchs ist. Bei (20) wird, ohne auf den ersten Stammbruch Rücksicht zu nehmen, die zweite Annäherung in einen Stammbruch verwandelt; dies muss umsomehr auffallen, als $\frac{29}{234}$ näher $\frac{1}{8}$, und $\frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$ ein aliquoter Teil des ersten Stammbruchs $\frac{1}{2}$ ist. Bei (11) und (15) ist die zweite Annäherung, wie bei (2), (3) und (5) die erste Annäherung, in Stammbrüche aufgelöst.

In die dritte Gruppe setze ich, eine dritte Annäherung annehmend,

(10) (53) $\sqrt{135} = 11\frac{1}{2}\frac{1}{14}\frac{1}{21}$ aus $12 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} - \frac{\frac{9}{64}}{23\frac{1}{4}} = 12 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} - \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{3}{62}$

$< 12 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 21}$, T. aus $11\frac{2}{3} - \frac{1\frac{1}{9}}{23\frac{1}{3}} = 11\frac{2}{8} - \frac{10}{210} = 11\frac{2}{3} - \frac{1}{21}$ und

(21) (64) $\sqrt{8\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{16}} = 2\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{6}$ aus $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{7}{8} : \frac{11}{2} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ (T.)

Zu (21) ist zu bemerken, dass $3 - \frac{1}{11} > \sqrt{9 - \frac{9}{16}} > 3 - \frac{1}{10}$ ist, also $3 - \frac{1}{11}$ sowohl, als auch $3 - \frac{1}{10}$ genauer sein würden.

Eine vierte Annäherung setze ich bei einem einzigen Beispiel voraus:

(12) (55) $\sqrt{6300} = 79\frac{1}{3}\frac{1}{34}\frac{1}{102}$ aus $79 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{25}{64} : 158\frac{3}{4} = 79 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{15}{254} < 79 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 17}$,

T. aus $79\frac{1}{3} + \frac{6\frac{2}{3}}{158\frac{3}{4}} = 79\frac{1}{3} + \frac{2}{51} = 79\frac{1}{3} + \frac{1}{34} + \frac{1}{102}$, wie (11) und (15).

Für die Beispiele (24) (67) $\sqrt{2460\frac{15}{16}} = 49\frac{1}{2}\frac{1}{17}\frac{1}{34}\frac{1}{51}$ und (25) (68) $\sqrt{615\frac{15}{64}} = 24\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{51}\frac{1}{51}\frac{1}{68}$ hat **Tannery** (S. 182) sehr wahrscheinlich gemacht, dass sie nicht direkt berechnet worden sind, sondern

(24) $49\frac{31}{51}$ als Differenz von (12) $79\frac{19}{51}$ und von (22) $29\frac{13}{17}$ und

(25) $24\frac{40}{51}$ als die Hälfte von (24) $49\frac{31}{51}$.

Uebrigens wüsste ich (25) auch als Quadratwurzel leicht zu erklären:

$$\sqrt{615\frac{15}{64}} = \sqrt{25^2 - 9\frac{49}{64}} > 25 - \frac{1}{5}\,;\quad \sqrt{615\frac{15}{64}} = \sqrt{\left(25 - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{311}{1600}} = 25 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{311}{15\,872} < 25 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5 \cdot 51}\,;$$

(24) freilich nur durch einen Kunstgriff:

$$\sqrt{2\,460\frac{15}{16}} = \sqrt{50^2 - 39\frac{1}{16}} > 50 - \frac{1}{2},\ \sqrt{2\,460\frac{15}{16}} = \sqrt{\left(49\frac{1}{2}\right)^2 + 10\frac{11}{16}} = 50 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{19}{88} < 50 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4},$$

$$\sqrt{2\,460\frac{15}{16}} = \sqrt{\left(49\frac{5}{8}\right)^2 - 1\frac{45}{84}} = 50 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} - \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{109}{794} > 50 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 7},$$

$$50 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 7} = 49\frac{17}{28} = 49\frac{1}{2}\frac{1}{14}\frac{1}{28},\ \sqrt{2\,460\frac{15}{16}} = \sqrt{\left(49\frac{17}{28}\right)^2 + \frac{27}{392}} = 49\frac{1}{2}\frac{1}{14}\frac{1}{28} + \frac{1}{29} \cdot \frac{9}{461}$$

$< 49\frac{1}{2}\frac{1}{14}\frac{1}{28} + \frac{1}{28 \cdot 51}$ oder $< 49\frac{31}{51}$. Doch dies nur beiläufig

Wenn Tannery (10) $135 = 11\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{21}$ aus $11 + \frac{2}{3} - \frac{1}{21}$ erklärt, so nimmt er an, dass **Heron**, um subtraktive Zahlen zu vermeiden, im Ergebniss $\frac{2}{3} - \frac{1}{21}$ als Summe geschrieben habe $= \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{21}$. Ich bin aber der Meinung, dass überall, wo **Heron** im Ergebnis den als Stammbruch geltenden Bruch $\frac{2}{3}$ hat und **Tannery** denselben als erste Annäherung auffasst, **Heron** von der nächst höheren Zahl ausgegangen ist und als Annäherung $-\frac{1}{3}$ gefunden hat. Denn es scheint mir verhältnissmässig schwer, zwischen den Annäherungen $+\frac{1}{2}$, $+\frac{2}{3}$, $+\frac{3}{4}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, aber sehr leicht zwischen den Annäherungen $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$ die Wahl **zu treffen.**

Es gibt noch eine andere Gruppe Heronischer Näherungswerte, die in Betracht zu ziehen sind, die Werte für die Flächen regelmässiger Vielecke, ausgedrückt durch die Seiten. Im Folgenden bezeichne F_n die Fläche, s_n die Seite eines regelmässigen n-ecks, ϱ_n den Halbmesser des einbeschriebenen, r den des umbeschriebenen Kreises. Was nun zunächst

$$F_3 = \frac{13}{30} s_3^2 = \frac{3}{2} s_3 \varrho_3, \text{ also } \varrho_3 = \frac{13}{45} s_3 \quad , \quad F_6 = \frac{13}{5} s_6^2 = 3 s_6 \cdot \varrho_6, \text{ also } \varrho_6 = \frac{13}{15} s_6 \quad ,$$

$$F_{12} = \frac{45}{4} s_{12}^2 = 6 s_{12} \varrho_{12}, \text{ also } \varrho_{12} = \frac{15}{8} s_{12}$$

angeht, so ergibt sich aus $\varrho_3 = \frac{13}{45} s_3$ die Höhe des gleichseitigen Dreiecks $= 3\varrho_3$ zu $\frac{13}{15} s_3$, d. h. zu $\frac{1}{2} s_3 \cdot \frac{26}{15}$, also $\sqrt{3} = \frac{26}{15}$; ebenso ergibt sich aus $\varrho_6 = \frac{13}{15} s_6$ oder $\varrho_6 : \frac{1}{2} s_6 = \frac{26}{15}$ unzweifelhaft $\sqrt{3} = \frac{26}{15}$. Dagegen führt $\varrho_{12} : \frac{1}{2} s_{12} = \frac{15}{4}$ nach der von **Archimed** benutzten Formel $\varrho_{12} : \frac{1}{2} s_{12} = 2 + \sqrt{3}$ auf $\sqrt{3} = \frac{7}{4}$. Dass Heron $2 + \sqrt{3}$ unter der Form $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ [53]) erhalten habe, ist mir nicht wahrscheinlich.

Ferner aus $F_8 = \frac{29}{6} s_8^2 = 4 s_8 \varrho_8$, also $\varrho_8 = \frac{29}{24} s_8$ ergibt sich $\varrho_8 : \frac{1}{2} s_8 = \frac{29}{12}$; nun ist $\varrho : \frac{1}{2} s_8 = (r + \varrho_4) : \frac{1}{2} s_4$ und $\varrho_4 : \frac{1}{2} s_4 = 1$, $r : \frac{1}{2} s_4 = \sqrt{2}$,

$$\text{daher } \sqrt{2} = \frac{29}{12} - 1 = \frac{17}{12}.$$

Die Formel $\varrho_8 : \frac{1}{2} s_8$ oder $\cot 22^0 30' = 1 + \sqrt{2}$ ist bei **Aristarch** von **Samos** nachweisbar, der aber $\frac{7}{5}$ für $\sqrt{2}$ setzt[54]). Auch dieses $\frac{7}{5}$ ist ausser dem sicheren $\frac{17}{12}$ bei **Heron** als wahrscheinlicher Näherungswert für $\sqrt{2}$ von **Cantor**[55]) nachgewiesen. Auf den öfteren Gebrauch von $\frac{26}{15}$ für $\sqrt{3}$ ist schon hingewiesen worden.

Etwas schwieriger als um die Erklärung der bisher angeführten Formeln steht es um die der folgenden:

$$F_5 = \begin{Bmatrix} \frac{5}{3} s_5^2 = \frac{5}{2} s_5 \varrho_5, \text{ also } \varrho_5 = \frac{2}{3} s_5 \\ \frac{12}{7} s_5^2 = \frac{5}{2} s_5 \varrho_5, \text{ also } \varrho_5 = \frac{24}{35} s_5 \end{Bmatrix} \text{ und } F_{10} = \frac{15}{2} s_{10}^2 = 5 s_{10} \varrho_{10}, \text{ also } \varrho_2 = \frac{3}{2} s_{10}.$$

Tannery nimmt an (S. 186, 187), dass $\varrho_5 = \frac{2}{3} s_5$ und $\varrho_{10} = \frac{2}{3} s_{10}$ aus $\sqrt{5} = 2$ berechnet worden sei. Jedenfalls erhält man aus $\varrho_{10} : s_{10} = 3 : 2$ für das Bestimmungsdreieck des regelmässigen Zehnecks die Basis 2 und die Höhe 3. Wir haben aber im Abschnitt 2 gesehen, dass 3 als Näherungswert des Schenkels für die Basis 2 galt, hätten also den Fall, dass die Höhe gleich dem Schenkel wäre; dabei ist freilich nicht zu übersehen, dass das Verhältnis $\frac{3}{2}$ für $\varrho_{10} : s_{10}$ genauer ist als für $r : s_{10}$. Verlängert man nun die Basis um den Schenkel 3, so erhält man ein dem ersten ähnliches Dreieck mit der Basis 3 und dem Schenkel 5, wo $\frac{5}{3}$ wieder

ein uns bekanntes Verhältnis ist. Es ist aber dann die Höhe des ersten Dreiecks, wieder gleich dem Schenkel gesetzt, die halbe Seite eines regelmässigen Fünfecks mit $r = 5$ und $\varrho_5 = 4$, und $\frac{1}{2} s_5 = 3$, $\varrho_5 = 4$, $r = 5$ bilden das bekannte Pythagoreische Dreieck (**Tannery**, a. a. O.). Man kann daher dieses Dreieck aus den drei Seiten konstruieren und aus ihm das Bestimmungsdreieck des regelmässigen Fünfecks finden, oder auch sofort letzteres selbst aus der Basis 6 und dem Schenkel 5 konstruieren. Für $\varrho_5 = \frac{24}{35} s_5$ kann ich eine erklärende Figur nicht finden. **Tannery** leitet arithmetisch aus $F_5 = s_5^2 \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} = \frac{12}{7} s_5^2$ ab:

$$\sqrt{5} = 2\tfrac{1}{5},$$

wobei er genötigt ist, die von mir systematisch angewandte Annäherung

$$\sqrt{a^2+1} > a + \frac{1}{2a+1}$$ zu gebrauchen.

An dieser Stelle sei nachgetragen, dass eine zweite von **Tannery** für $\frac{265}{153} < \sqrt{3}$ gegebene Ableitung (S. 323) auf die Formel $\sqrt{a^2-1} > a - \frac{1}{2a-1}$ hinausläuft. Für die erstere Formel kann ein arabischer Mathematiker, **Alkarchî**[56]), der nachweislich und eingestandener Massen aus griechischen Quellen geschöpft hat, angeführt werden, sofern er

$$\sqrt{a^2+b} = a + \frac{b}{2a+1}$$

anwendet: in unserem Falle ist $b = 1$.

Noch unsicherer als für $F_5 = \frac{12}{7} s_5^2$ ist die geometrische Grundlage für die Näherungsformeln:

$$F_7 = \frac{43}{12} s_7^2 = \frac{7}{2} s_7 \varrho_7, \text{ also } \varrho_7 = \frac{43}{42} s_7, \qquad F_9 = \begin{cases} \frac{51}{8} s_9^2 = \frac{9}{2} s_9 \varrho_9, \text{ also } \varrho_9 = \frac{17}{12} s_9 \\ \frac{38}{6} s_9^2 = \frac{9}{2} s_9 \varrho_9, \text{ also } \varrho_9 = \frac{38}{27} s_9 \end{cases}.$$

$$F_{11} = \frac{66}{7} s_{11}^2 = \frac{11}{2} s_{11} \varrho_{11}, \text{ also } \varrho_{11} = \frac{12}{7} s_{11},$$

Ohne auf die von **Tannery** (S. 188 ff) und von **Günther** (S. 125, 126) gegebenen Ableitungen einzugehen, beschränke ich mich auf folgende Bemerkungen.

Diese Näherungswerte fallen — von einem abgesehen — genau oder sehr nahe mit Näherungs-Konstruktionen zusammen. So findet man für das Bestimmungsdreieck des regelmässigen Elfecks die Basis 14 und den Schenkel 25, oder wenn man die Höhe 24 mitbenutzt, hat man ein Pythagoreisches Dreieck mit den Seiten 7, 24 und 25. Für das Bestimmungsdreieck des regelmässigen Neunecks ergibt sich aus $\frac{1}{2} s_9 = 6$ und $\varrho_9 = 17$ sehr nahe $r = 18$ $(18^2 + 1 = 17^2 + 6^2)$; man hat daher ein gleichschenkliges Dreieck aus der Basis 2 und dem Schenkel 3 zu konstruieren: die Höhe wird annähernd $= 3 - \frac{1}{6} = \frac{17}{6}$. Diese Konstruktion ist dadurch besonders merkwürdig, dass sie — von dem Näherungswert für die Höhe abgesehen — zusammenfällt mit der oben besprochenen für das regelmässige Zehneck. Für das Bestimmungsdreieck des regelmässigen Siebenecks hat man $\frac{1}{2} s_7 = 21$, $\varrho_7 = 43$, also r nahezu $= 48$ $(48^2 - 14 = 43^2 + 21^2$, genauer wäre daher $48 - \frac{1}{7})$, und das Verhältnis $s_7 : r$ wird $7 : 8$. Man hätte hiernach ein gleichschenkliges Dreieck aus der Basis 7 und dem

Schenkel 8 zu konstruieren; die Höhe würde $= \sqrt{8^2 - (3\frac{1}{2})^2} = \sqrt{51\frac{3}{4}} = \sqrt{7^2+2\frac{3}{4}}$ sein, also zwischen $7\frac{1}{5}$ und $7\frac{1}{6}$ liegen, freilich näher an $7\frac{1}{5}$. Für den Schenkel 16 und die Basis 14, oder die Hypotenuse 16 und die Kathete 7 wird die andere Kathete sehr nahe $14\frac{1}{3}$ $\left(14\frac{1}{8} < \sqrt{196+11} < 14\frac{1}{2}\right)$. — Aus $\frac{1}{2}$ $s_9 = 27$, $\varrho_9 = 76$ ergibt sich ungezwungen keine Näherungs-Konstruktion.

Ueber die Frage, ob die Näherungswerte auf solchen annähernd richtigen Konstruktionen beruhen, oder ob umgekehrt solche Näherungs-Konstruktionen aus berechneten Näherungswerten abgeleitet worden sind, ist keine Entscheidung möglich. Was die Genauigkeit jener Konstruktionen angeht, so ist

$\text{arc sin}\ \frac{3}{5} = \text{arctg}\ \frac{3}{4} = 36^0\ 52\frac{1}{2}'$ ca., also $52\frac{1}{2}'$ zu gross, Fehler $\frac{52\frac{1}{5}}{36 \cdot 60} < \frac{1}{41}$,

$\text{arc tg}\ \frac{1}{3} = 18^0\ 26\frac{1}{10}'$ ca., also $26\frac{1}{10}'$ zu gross, Fehler wie vorher,

$\text{arc sin}\ \frac{7}{25} = \text{arctg}\ \frac{7}{24} = 16^0\ 21\frac{9}{11}'$ ca., etwa $6\frac{2}{9}'$ zu klein, Fehler $= \frac{6\frac{2}{9}}{981\frac{9}{11}} < \frac{1}{157}$,

$\left\{\begin{array}{l} \text{arc sin}\ \frac{1}{3} = 19^0\ 28\frac{2}{7}' \text{ ca., also } 31\frac{5}{7}' \text{ zu klein, Fehler } = \frac{31\frac{5}{7}}{20 \cdot 60} < \frac{1}{37} \\ \text{arg tg}\ \frac{6}{17} = 19^0\ 26\frac{2}{5}' \text{ ca., also } 33\frac{3}{5}' \text{ zu klein, Fehler } = \frac{33\frac{3}{5}}{20 \cdot 60} < \frac{1}{35} \end{array}\right\}$,

$\left\{\begin{array}{l} \text{arc sin}\ \frac{7}{16} = 25^0\ 56\frac{2}{3}' \text{ ca, etwa } 13\frac{4}{5}' \text{ zu gross, Fehler } = \frac{13\frac{4}{5}}{1542\frac{5}{7}} < \frac{1}{111} \\ \text{arc tg}\ \frac{21}{43} = 26^0\ 1\frac{3}{4}' \text{ ca, etwa } 18\frac{8}{9}' \text{ zu gross, Fehler } = \frac{18\frac{8}{9}}{1542\frac{6}{7}} < \frac{1}{81} \end{array}\right\}$.

Für das regelmässige Zehneck würde sich eine sehr befriedigende Näherungs-Konstruktion aus dem uns bekannten Verhältnis $s_{10} : r = 13 : 21$ ergeben; nämlich für $s_{10} = 13$ und $r = 21$ wird ϱ_{10} sehr nahe $= 20$. Man hat also ein gleichschenkliges Dreieck aus der Basis 13 und dem Schenkel 21, oder ein rechtwinkliges Dreieck aus den Seiten 13, 40 und 42 $(40^2 - 5 = 42^2 - 13^2)$ zu konstruieren. Für die Fläche erhält man $\frac{100}{13} s_{10}^2$, und es ist $\text{arc tg}\ \frac{13}{40} = 18^0\ \frac{5}{12}'$ noch genauer als $\text{arc sin}\ \frac{13}{42} = 18^0\ 1\frac{5}{6}'$. Die entsprechenden Werte für das Fünfeck sind $\frac{1}{2}$ $s_5 = 20$, $r_5 = 34$, $s_5 = 34 - \frac{13}{2} = 27\frac{1}{2}$, also $\varrho_5 : \frac{1}{2}$ $s_5 = 11 : 8$, $F_5 = \frac{55}{32} s_5^2$ und $\text{arc tg}\frac{8}{11} = 36^0\ 1\frac{9}{14}'$.

VII. Die Methode der Astronomen.

Durchaus verschieden von dem Verfahren des **Archimedes** und des **Heron** ist die Methode, nach der die griechischen Astronomen die Quadratwurzel ausziehen: sie bedienen sich dabei, wie zu ihren übrigen Berechnungen, der von den Babyloniern entlehnten Sexagesimalbrüche, und zwar in derselben Weise, wie wir der Decimalbrüche. Uns scheint der Uebergang von Sexagesimal- zu Decimal-Brüchen nur ein Schritt, und ein recht leichter Schritt zu sein. Doch erst die Inder haben denselben getan, nicht ohne Mangel an Folgerichtigkeit, wie ich

in einem späteren Abschnitt zeigen werde. Das Verfahren der griechischen Astronomen hat uns **Theon von Alexandria** in seinem Commentar zum 1. Buch des Almagest's [57]) ausführlich erläutert. Der einzige Unterschied von der jetzt üblichen Erläuterung für Decimalbrüche besteht in der geometrischen Einkleidung, indem Theon zum Quadrat über a den Gnomon $ab + ab + b^2$, zu dem über $a + b$ den Gnomon $2(a + b)\,c + c^2$ und so fort konstruiert. So findet er für $\sqrt{4500}$ $a = 67$ und $2ab + b^2 = 11 = \frac{660}{60}$, hieraus $b = \frac{4}{60}$ und $2(a+b)\,c + c^2 = \frac{124}{60} - \frac{4}{60^2} = \frac{7424}{60^2}$, also $c = \frac{7424}{60^2} : 134\frac{8}{60} < \frac{55}{60^2}$, mithin

$$\sqrt{4500} = 67 + \frac{4}{60} + \frac{55}{60^2} = 67^0\ 4'\ 55.''$$

Diese Methode, die wie die moderne im Laufe der Rechnung immer unter dem wahren Werte der gesuchten Quadratwurzel bleiben lässt, bietet für die Erklärung der sonst von den Griechen angewandten Stammbruch-Methode keinen anderen Anhalt, als den Gebrauch des Gnomons. Wohl aber wirft sie Licht auf die Frage, wie die Griechen für die Quadratwurzel aus einer dekadischen Zahl die Grenzen in ganzen Zahlen gefunden haben, uud lässt kaum eine andere Antwort zu, als die, dass ihr Verfahren mit dem modernen übereingestimmt hat.

B. Die Inder.

I. Die Quadratwurzel aus 2 und die aus 3 in den Çulvasûtras.

In dem ältesten uns zugänglich gewordenen Denkmal indischer Mathematik, den **Çulvasûtras**, werden Näherungswerte für quadratische Irrationalitäten ganz nach griechischer Weise in Stammbrüchen angegeben. So wird $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$ gesetzt[58]).

Man kann nun nach **Cantor** a. a. O. diesen Näherungswert $\frac{577}{408}$ in Beziehung bringen zu dem bei den Griechen nachgewiesenen $\frac{17}{12}$, indem man $\left(\frac{17}{12}\right)^2 = \frac{289}{144} = 2\frac{1}{144}$ bildet und aus $\sqrt{\left(\frac{17}{12}\right)^2 - \frac{1}{144}}$ nach der Formel $\sqrt{a^2 - b} = a - \frac{b}{2a}$ ableitet:

$$\frac{17}{12} - \frac{1}{12.34} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}.$$

Freilich würde man auch im Verfolg des Theonischen Verfahrens auf $\frac{577}{408}$ stossen:

$a = 1;\ 2;\ 5;\ 12;\ 29:\ 70;\ 169;\ 408;\ \ldots$
$b = 1;\ 3;\ 7;\ 17;\ 41;\ 99;\ 239;\ 577;\ \ldots$

Doch spricht das Folgende mehr für die erste Annahme.

Ein anderer Näherungswert für $\sqrt{2}$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 29} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 29 \cdot 6} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8}, \quad \text{also } \frac{23\,623}{16\,704}$$

tritt nicht unmittelbar auf, sondern muss erst aus einer Näherungs - Konstruktion abgeleitet werden, die **Cantor**[59]) treffend eine Circulatur des Quadrats genannt hat. Es soll (Fig. IVa) ein Kreis gleich einem gegebenen Quadrat ABCD gefunden werden. Zunächst werden die Diagonalen, und durch ihren Durchschnittspunkt E eine Gerade parallel den Seiten AD und BC gezogen, welche AB in J trifft. Dann wird um E mit EA ein Bogen beschrieben, der diese Gerade in F schneidet, und JH $= \frac{1}{3}$ JF gemacht : EH soll der Halbmesser des gesuchten Kreises sein, d. h., wenn a die Quadratseite ist, so ist der Durchmesser $d = 2EH = a + a \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{3} = a \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{3}$. Nun findet sich an anderer Stelle[60]) die Regel, man solle den Durchmesser eines gegebenen Kreises mit

$$\frac{7}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8}, \quad \text{also } \frac{9\,785}{11\,136}$$

multiplizieren, um die Seite eines Quadrats zu finden, welches mit dem Kreise gleiche Fläche habe. **Thibaut** hat zuerst den Gedanken gehabt, diese Regel mit jener Konstruktion in Zusammenhang zu bringen, und **Cantor** denselben weiter ausgeführt. Indem ich **Thibaut**'s Gedanken aufnehme, weiche ich in der Ausführung von **Cantor** ab. Aus der Formel

$d = a \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{3}$ ergiebt sich sofort $a = \frac{3}{2 + \sqrt{2}} \cdot d$.

Nun wäre es an sich denkbar, dass in letzteren Ausdruck für $\sqrt{2}$ eine Näherungswert eingesetzt wäre, und zwar $\frac{3 \cdot 11\,136 - 2 \cdot 9\,785}{9\,785} = \frac{13\,838}{9\,785}$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4} \cdot \frac{289}{9785} < 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$$

sehr nahe der in den **Çulvasûtras** explicit gegebene Wert für $\sqrt{2}$. Versucht man aber umgekehrt, denselben in $\frac{3}{2 + \sqrt{2}}$ einzusetzen, so führt die Zerfällung von $\frac{3 \cdot 408}{2 \cdot 408 + 577} = \frac{1\,224}{1\,393}$ in Stammbrüche auf $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 34} + \frac{1}{8 \cdot 34 \cdot 1393}$, und wenn alternierende Vorzeichen beliebt werden, auf $1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 33} - \frac{1}{8 \cdot 33 \cdot 34} + \frac{1}{8 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 42} \cdots$, aber ungezwungen nicht auf $\frac{7}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8}$.

Der in den Nennern vorkommende Faktor 29 legt anderseits nahe, da 29 sich als Seitenzahl nach **Theon's** Verfahren finden lässt, den Gebrauch von $\frac{41}{29}$ für $\sqrt{2}$ vorauszusetzen. Diese Annahme bedingt aber, dass $\frac{41}{29}$ nicht in den Ausdruck $\frac{3}{2 + \sqrt{2}}$, sondern in den demselben gleichen $\frac{3}{2}(2 - \sqrt{2})$ eingesetzt ist. Das hätte auch keine Bedenken, wenn man voraussetzen dürfte, dass die Aufgabe, $\frac{3}{2 + \sqrt{2}}$ in einen Bruch mit rationalem Nenner zu verwandeln, welche **Bhâskara**[61]) lösen konnte, schon **Bandhâjana** hätte bewältigen können. So werde ich versuchen, aus der überlieferten Circulatur des Quadrats eine Quadratur des Zirkels zu rekonstruieren, die wohl vor jener gefordert und gegeben worden ist. Ziehe ich (Fig. IVb) durch H zu AB

eine Parallele, welche die Verlängerung der Diagonale DB in M schneidet, so ist, wenn man H J mit 1 (also J F mit 3) bezeichnet, $BM = \sqrt{2}$ Mache ich dann $JL = JF = 3$, so ist $AL = LF = 3\sqrt{2}$ und $AJ = 3 + 3\sqrt{2}$, ferner $EH = EJ + JH = JA + JH = 4 + 3\sqrt{2}$ und $EF = 6 + 3\sqrt{2}$, endlich $EM = EB + BM = EF + BM = 6 + 4\sqrt{2}$ und $NM = EM - EN = EM - EH = 2 + \sqrt{2}$, also $EB = EF = 6 + 3\sqrt{2} = 3\,MN$. Man hat daher um den gegebenen Kreis ein Quadrat zu beschreiben und die dreifache Differenz seiner halben Diagonale und des Kreishalbmessers auf den Diagonalen von ihrem Durchschnittspunkt aus nach beiden Seiten abzutragen: die Endpunkte der Abschnitte sind die Ecken des verlangten Quadrats. Wenn man nunmehr mit 1 den Radius des gegebenen Kreises bezeichnet, so ist $\sqrt{2}$ die halbe Diagonale des umbeschriebenen Quadrats, und die dreifache Differenz dieser beiden Strecken $3(\sqrt{2} - 1)$ ist die halbe Diagonale des gesuchten Quadrats, [62]), also $3(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2} = 3(2 - \sqrt{2})$ seine Seite. Daher ist das Verhältnis der Seite zum Durchmesser $= \frac{3(2-\sqrt{2})}{2}$. Diesen Wert kann man auch auf anderem Wege ableiten. Beschreibt man um E mit EK einen Kreis, der die Verlängerung von EF in P schneidet, und halbiert EP in Q, so ist $EQ = PQ = 3 + \sqrt{2}$, $PH = 2 + \sqrt{2}$, also $HQ = 1 + \sqrt{2}$ und $EJ = 3\,HQ$; $EQ = QN$ ist aber die halbe Seite des dem Kreise einbeschriebenen Quadrats, welches daher in der Konstruktion an die Stelle des umbeschriebenen Quadrates tritt, sodass man die Regel erhält: Mache die halbe Seite des einem Kreise gleichen Quadrats gleich der dreifachen Differenz zwischen dem Halbmesser und der halben Seite des einbeschriebenen Quadrats. Bezeichnet man den Halbmesser wieder mit 1, so ist die Seite des einbeschriebenen Quadrats $= \sqrt{2}$ und die halbe Seite des gesuchten $= 3\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{3}{2}(2 - \sqrt{2})$. Man erhält diesen Ausdruck leichter, aber die Konstruktion entfernt sich mehr von der überlieferten Cirkulatur des Quadrats. Für $\sqrt{2} = \frac{17}{12}$ ist der abgeleitete Ausdruck $= \frac{7}{8}$, für $\frac{17}{12} - \frac{1}{12 \cdot 34}$ ist er $\frac{7}{8} + \frac{1}{8 \cdot 34}$, endlich für $\sqrt{2} = \frac{41}{29}$ ist er $\frac{7}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29}$. Sucht man nun aus $\frac{41}{29}$ eine grössere Annäherung für $\sqrt{2}$, so wie oben aus $\frac{17}{12}$, so erhält man

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 29} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 29 \cdot 6} > \sqrt{\left(\frac{41}{29}\right)^2 + \frac{1}{841}}, \quad \text{darauf}$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 29} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 29 \cdot 6} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8},$$

$$\text{also } \frac{23\,623}{16\,704} = \sqrt{\left(\frac{41}{29} + \frac{1}{29 \cdot 72}\right)^2 - \frac{721}{29^2 \cdot 72^2}}$$

$$\text{und } \frac{3}{2}(2 - \sqrt{2}) = \frac{7}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8}.$$

Ich setze hiernach ein Verfahren voraus, das aus dem **Theon's** und dem von mir an den Archimedischen Ungleichungen entwickelten combiniert ist. Als Theonische Seiten- und Diametral-Zahlen können 23 623 und 16 704 nicht gefunden sein, denn $2 \cdot 16\,704^2 - 23\,623^2$ ist $= 1\,103$. Die nächst liegenden Zahlen, 19 601 und 13 860, liefert Theon's Verfahren als 12te Werte. Dasselbe Verhältniss, $\frac{19601}{13860}$, das selbstverständlich genauer ist als das der **Çulvasûtras**, erhält man als Näherungswert 5ten Grades, wenn man mein Verfahren auf $\sqrt{2}$ konsequent anwendet:

$$2 > \sqrt{2} > 1;\ 1 + \tfrac{1}{2} > \sqrt{2} > 1 + \tfrac{1}{3};\ 1 + \tfrac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 6} > \sqrt{2} > 1 + \tfrac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 5};$$

$$1 + \tfrac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 7} > \sqrt{2} > 1 + \tfrac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 2};\ 1 + \tfrac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 7}$$

$$- \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 198} > \sqrt{2} > 1 + \tfrac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 197},$$

$$\text{also } 2 > \tfrac{3}{2} > \tfrac{17}{12} > \tfrac{99}{70} > \tfrac{19\,601}{13\,860} > \sqrt{2} > \tfrac{19\,502}{13\,790} > \tfrac{113}{80} > \tfrac{7}{5} > \tfrac{4}{3} > 1.$$

Doch schon die numerische Genauigkeit des indischen Werts steht in einem argen Missverhältnis zu der Schwäche seiner geometrischen Grundlage: ist ja das altägyptische Verhältnis des **Ahmes**, $\frac{8}{9}$ [63]), weit genauer, als das indische mit seinen vielen Näherungsbrüchen.

An anderer Stelle lehren die **Culvasûtras**, die Seite des einem Kreise gleichen Quadrats sei $\frac{13}{15}$ des Durchmessers [64]). In dieser Zahl erkennt **Cantor** a. a. O. den bekannten Näherungswert $\frac{26}{15}$ für $\sqrt{3}$ und nimmt an, dass $\frac{13}{15}$ aus $x^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi$ für $\pi = 3$ hergeleitet worden sei, also aus $x : d = \sqrt{3} : 2$ Nun ist es keinem Zweifel unterworfen, dass der Wert 3d für den Kreisumfang aus dem Umfang des dem Kreise einbeschriebenen regelmässigen Sechsecks gefunden ist. Dadurch ist man aber keineswegs zu der Annahme gezwungen, dass die Fläche des Kreises zu $\left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot 3$ hergeleitet sei aus einem gleichschenkligen Dreieck, dessen Basis der Kreisumfang 3d und dessen Höhe der Halbmesser $\frac{d}{2}$ ist, oder aus einem Rechteck, dass den halben Kreisumfang und den Halbmesser zu anstossenden Seiten hat. Vielmehr scheint es mir natürlicher, dass von der Fläche des dem Kreise einbeschriebenen regelmässigen Zwölfecks ausgegangen ist, welche wirklich $= 3 \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2$ ist. Die Inder könnten diese Fläche leicht aus einer Figur abgeleitet haben, wie der dem Quadrat über a + b in Figur I eingezeichneten: die Summe zweier anstossender Bestimmungs-Dreiecke des Zwölfecks ist die Hälfte eines Quadrats, welches den Halbmesser zur Seite hat.

II. Die Methode Bhâskara's.

Wir haben gesehen, dass die Näherungsformeln der **Çulvasûtras**, ein griechisches Gepräge tragen, auch zu ihrer Ableitung keine anderen Annahmen gemacht, als zu der ihrer Muster. Wenn wir ferner für die Griechen zu dem Schluss gekommen sind, dass die Methode, nach der sie für eine Quadratwurzel die nächste ganze Zahl gesucht haben, von der modernen im Wesen sich kaum habe unterscheiden können, für die Inder steht fest [65]), dass auch in der Form ihr Ausziehen der Quadrat- wie der Cubikwurzel, soweit es sich auf ganze Zahlen beschränkt, mit dem modernen Verfahren übereinstimmt, indem sie den Radikanden von der Einerstelle aus in Gruppen von zwei, bezw. von drei Stellen abteilen. Die weitere Annäherung wird dagegen von den späteren Indern nicht in Stammbrüchen gesucht. Vielmehr findet findet sich bei **Bhâskara** [66]) die Regel: „Aus dem Produkte des Zählers und Nenners, multipliziert mit einer angenommenen grossen Quadratzahl, ziehe die Quadratwurzel; diese, dividiert durch den mit der Quadratwurzel des Multiplikators multiplizierten Nenner, wird ein Nähe-

rungswert sein." Als Beispiel dient die Hypotenuse eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks mit der Kathete $\frac{13}{4}$, also die Quadratwurzel aus $\frac{169}{8}$. „Das Produkt des Zählers und Nenners ist 1352. Multipliziert man mit 10 000 (dem Quadrat von 100), so erhält man als Produkt 1 352 000.[67]) Hieraus die Wurzel ist annähernd 3 677. Dividiert man diese durch den mit der Quadratwurzel des Multiplikators multiplizierten Nenner, nämlich durch 800, so ergibt sich der Näherungswert $4 \frac{477}{800}$." Das Verfahren wird durch das Beispiel völlig klar, es lässt sich in die Formel fassen:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab.\ 10^{2n}}}{b.\ 10^{n}}$$

Sofort springt nun in's Auge: es liegt dem Inder fern, den Bruch $\frac{1}{8}$ in einen geeigneten Decimalbruch, wie $\frac{1250}{10\,000}$, zu verwandeln und die Quadratwurzel aus $\sqrt{\frac{21\ 12\ 50}{100}}$ zu berechnen, ebenso, zu beachten, ob der Nenner des Radikanden einen quadratischen Faktor (hier 4) enthält. Das Folgende wird zeigen, dass der Inder auch keinen Wert darauf legt, einen sich etwa ergebenden Decimalbruch beizubehalten. Im Verlauf einer und derselben geometrischen Aufgabe [68]) gibt **Bhâskara** folgende Näherungswerte an:

1) und 2) $\sqrt{621} = \sqrt{2\,700} = 76 \frac{22}{25}$; 3) $\sqrt{\frac{38\,016}{25}} = 38 \frac{622}{625}$; 4) $\sqrt{5\,049} = 71 \frac{1}{25}$; 5) $\sqrt{2\,176} = 46 \frac{16}{25}$

Ihre Berechnung stelle ich mir folgender Massen vor:

$$1)\quad \sqrt{621} = \frac{\sqrt{6\,21\,00\,00}}{100} < 24 \frac{92}{100} \text{ oder } < 24 \frac{23}{25}$$

$$2)\quad \sqrt{2700} = \frac{\sqrt{27\,00\,00\,00}}{100} > 51 \frac{96}{100} \text{ oder } > 51 \frac{24}{25}$$

$$\left.\begin{matrix}1)\\2)\end{matrix}\right\}\quad \sqrt{621} + \sqrt{2\,700} = 76 \frac{22}{25} \text{ ca.}$$

$$3)\quad \sqrt{\frac{38\,016}{25}} = \frac{\sqrt{38\,016 \cdot 25 \cdot 10\,000}}{2\,500} = \frac{\sqrt{95\,04\,00\,00\,00}}{2\,500} > \frac{97488}{2\,500}, \text{ d. h. } 38 \frac{622}{625} \text{ ca.}$$

$$5)\quad \sqrt{2176} = \frac{\sqrt{2176\,00\,00}}{100} > 46 \frac{64}{100}, \text{ d. h. } 46 \frac{16}{25} \text{ ca.}$$

Soweit ist nur eine konsequente Anwendung der Regel zu bemerken, auf $b = 25$ in 3), auf $b = 1$ in den übrigen Beispielen. Für 1), 2) und 3 ist der Fehler $< \frac{1}{100}$, dagegen wäre für 5) $46 \frac{65}{100} > \sqrt{2\,176}$, also $46 \frac{13}{20}$ genauer gewesen. Eigentümliche Schwierigkeiten aber bietet 4), denn es ist $71 \frac{6}{100} > \sqrt{5\,049} > 71 \frac{5}{100}$, und man fühlt sich fast versucht, wenn man 4) mit 5) zusammenhält, den Indern eine unverständliche Vorliebe für den Nenner 25 zuzuschreiben. Es werden nämlich diese beiden Wurzeln *pari passu* für die Diagonalen eines Vierecks gefunden, und wenn man die Annäherung in Brüchen mit gleichem Nenner geben will, so liegt 20 näher als 25. Rücksicht auf 1) und 2), für welche der Nenner 25 sich ungezwungen ergibt, kann kaum bestimmend gewesen sein, denn inzwischen tritt in 3) ein Näherungswert mit dem Nenner 625 auf. Also auch hier, wie bei **Archimedes**, ungelöste, vielleicht unlösbare Rätsel.

III. Die Rektifikation des Kreises und des Kreisbogens.

Im ersten Abschnitt haben wir bereits zwei Lösungen für die Quadratur der Kreisfläche kennen gelernt. Im Folgenden werde ich mich nur mit Lösungen für die Rektifikation des des Kreisumfangs, bezw. des Kreisbogens, beschäftigen, denn die sonst noch gegebenen Lösungen für die Quadratur setzen die Kreisfläche gleich dem Rechteck aus dem halben Kreisumfang und dem Halbmesser [69]).

Von **Brahmagupta** wird, wenn d den Durchmesser des Kreises bedeutet, für den Kreisumfang 3d und $\sqrt{10d^2}$ [70]), von **Bhâskara** $\frac{22}{7}$ d [71]), $\frac{754}{240}$ d [72]) und $\frac{3\,927}{1\,250}$ d [71]) angegeben. Das Erstaunlichste aber ist, dass schon **Aryabhatta**, der älter als **Brahmagupta** und weit älter als **Bhâskara** ist, für das Verhältnis des Kreisumfangs zum Durchmesser das ausserordentlich genaue Verhältniss $\frac{62\,832}{10\,000}$ kennt [73]), welches bei **Bhâskara** in der Form $\frac{3\,927}{1\,250}$ auftritt.

Nächst dem schon besprochenen Näherungswert $\pi = 3$ ist, wenigstens von den älteren Indern, $\pi = \sqrt{10}$ am häufigsten angewendet worden [74]). Wenn nun zweifellos $\pi = 3$ aus dem Umfang des einbeschriebenen regelmässigen Sechsecks gefunden worden ist, so ist es mir wahrscheinlich, dass $\pi = \sqrt{10}$ aus dem des ebensolchen Zwölfecks abgeleitet ist. Der Inder kennt die Formel $h = \frac{1}{2}\,[d - \sqrt{(d+s)\,(d-s)}]$ [75]) oder $= \frac{1}{2}\,[d - \sqrt{d^2 - s^2}]$ [76]) oder $= r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}$ [77]), wo d wieder den Durchmesser, s eine Sehne und h den „Pfeil" oder die Höhe des zur Sehne gehörigen Abschnitts bedeutet. Für $s = r = \frac{d}{2}$ ergibt sich aus dieser Formel $h = r - \frac{r}{2}\sqrt{3}$. Ferner berechnet der Commentator **Bhâskara**'s, **Ganeça**, s_{12} aus $s_{12}^2 = \left(\frac{1}{2}\,s_6\right)^2 + h^2$ [77]). Nun stehen zwei Wege offen. Nimmt man an, dass $\sqrt{3}$ sofort ausgewertet wurde, so kommt man auf den bekannten Näherungswert $\sqrt{3} = \frac{5}{3}$; denn für $\sqrt{3} = \frac{5}{3}$ ist $h = r - \frac{5}{6}\,r = \frac{1}{6}\,r$ und $s_{12}^2 = \frac{1}{4}\,r^2 + \frac{1}{36}\,r^2 = \frac{5}{18}\,r^2 = \frac{5}{72}\,d^2$, also $u_{12}^2 = (12\ s_{12})^2 = 10\ d^2$. Macht man dagegen die Annahme, dass die Inder $\sqrt{3}$, wofür sie einen Namen und ein Zeichen hatten [78]), in der Rechnung beibehalten haben, so findet man $s_{12}^2 = \frac{r^2}{4} + \left(r - \frac{r}{2}\ \sqrt{3}\right)^2 = (2 - \sqrt{3})\,r^2$, und aus $u_{12}^2 = (12\ s_{12})^2 = 10\,d^2$ würde sich der in A, III angekündigte Wert $\frac{31}{18}$ für $\sqrt{3}$ ergeben. Für die Berechnung von $(r - \frac{r}{2}\sqrt{3})^2$ bemerke ich noch, dass bei **Bhâskara** [79]) sich wohl die Formel $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$, aber nicht die entsprechende $(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$ findet, vielmehr eine andere, die wir so ausdrücken würden: $a^2 = (a + x)\,(a - x) + x^2$. Diese letztere verstehe ich nun so: ist z. B. 97^2 zu bilden, so soll man nicht etwa, wie wir pflegen, $97^2 = (100 - 3)^2 = 100^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 100$, sondern $97^2 = (97 + 3)\,(97 - 3) + 9 = 100 \cdot 94 + 9$ setzen, oder mit anderen Worten, der Inder setzt $(x - y)^2 = x\,(x - 2y) + y^2$. Die indische Regel bietet nicht nur für ganze Zahlen, welche wenig kleiner oder grösser als eine runde Zahl sind, besondere Vorteile, sondern auch

für Zahlen von der Form $a + \frac{1}{2}$; nach ihr ist $\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 = (a + 1) \cdot a + \frac{1}{4}$, z. B. $\left(7\frac{1}{2}\right)^2 = 7 \cdot 8 + \frac{1}{4}$. Man hätte für unseren Fall also $\left(r - \frac{r}{2}\sqrt{3}\right)^2 = r(r - r\sqrt{3}) + \left(\frac{r}{2} \cdot \sqrt{3}\right)^2 = r^2 - r^2 \cdot \sqrt{3} + \frac{3}{4} r^2$ zu setzen. Wer aber an dem negativen Wert von $r - r\sqrt{3}$ Anstoss nimmt, der kann die gleichfalls indische Formel $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$[80] benutzen. Endlich ist die uns so geläufige Formel $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ implicite enthalten in einer Regel, welche **Bhâskara** für die Berechnung der Hypotenuse c eines rechtwinkligen Dreiecks aus den Katheten a und b gibt [81]: $c^2 = 2ab + (a - b)^2$. Diese Formel erleichtert die Ausrechnung, wenn $a - b$ eine leicht zu quadrierende Zahl, dazu a oder b, bezw. 2a oder 2b ein bequemer Faktor ist, z. B.

$$43^2 + 35^2 = 43 \cdot 70 + 8^2 \quad \text{und} \quad \left(14\frac{1}{2}\right)^2 + \left(5\frac{1}{2}\right)^2 = 14\frac{1}{2} \cdot 11 + 9^2 .$$

Der Wert $\frac{754}{240}$ für das Verhältniss des Kreisumfangs tritt nur einmal auf, in einer Aufgabe [72], in welcher für einen Kreis mit dem Halbmesser 120 nach einer am Schluss dieses Abschnitts zu besprechenden Formel die Sehne zu $\frac{1}{18}, \frac{2}{18}, \frac{3}{18}$, und so fort bis $\frac{9}{18}$ Kreisumfang, also zu 20°, 40°, 60°, . . . 180° berechnet werden soll. Merkwürdiger Weise stimmt dieser Wert mit dem von **Ptolemaeus** in einem Sexagesimalbruch gegebenen $3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2}$ [82] genau überein. Ueber die Wahl von 120 für den Halbmesser ein Wort bei der Besprechung des folgenden Näherungswerts.

Das Verhältniss $\frac{22}{7}$, welches in der oben citierten Regel [71] neben $\frac{3\,927}{1\,250}$ genannt wird, wird auch als Beispiel für letzteres aus $d = 7$ abgeleitet [83], nämlich $= 21\frac{1\,239}{1\,250}$ oder rund $= 22$; und umgekehrt wird hier gezeigt, dass für den Kreisumfang 22 der Durchmesser $7\frac{11}{3\,927}$ oder rund 7 ist. Darum zu glauben, dass $\frac{22}{7}$ erst aus $\frac{3\,927}{1\,250}$ gefunden sei, fällt mir schwer; auch misslingt durchaus die Ableitung von $\frac{754}{240}$ aus $\frac{3\,927}{1\,250}$; denn $\frac{3\,927}{1\,250} = 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7} \cdot \frac{11}{1250} > 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7 \cdot 114}$ führt, wenn man eine Zahl von der Form $7n + 1$ sucht, auf $3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7 \cdot 113} = 3\frac{16}{113}$, das Verhältniss des **Adrian Metius** [84]. An und für sich liegt die Ableitung von $3\frac{17}{120}$ aus den auch bei den indischen Astronomen [85] gebräuchlichen Sexagesimalbrüchen nahe; diese benutzen jedoch vorzugsweise $\sqrt{10}$, und wenn sie genauer sein wollen, $\frac{3927}{1\,250}$.

Zu diesem Verhältniss, $\frac{3\,927}{1\,250}$, gibt der schon genannte Commentator **Bhâskara**'s, **Ganeça**, folgende Erklärung [77]: „Der Halbmesser ist gleich der Seite eines regelmässigen Sechsecks im Kreise, wie gezeigt sein wird. Hieraus kann die Seite des regelmässigen Zwölfecks auf folgende Weise gefunden werden: da der Halbmesser die Hypotenuse und die halbe Seite des Sechsecks die eine Kathete ist, so ist die Quadratwurzel aus der Differenz ihrer Quadrate die andere; subtrahiert man diese vom Halbmesser, so ist der Rest der „Pfeil".

Wieder, da dieser „Pfeil" und die halbe Seite des Sechsecks die Katheten sind, so ist die Quadratwurzol aus der Summe ihrer Quadrate die Seite des Zwölfecks. Aus dies'r kann auf gleiche Weise die Seite des 24-ecks gefunden werden, und so fort, indem man die Zahl der Seiten des Polygon's verdoppelt, bis die Seite nahe dem Bogen ist. Die Summe solcher Seiten wird näherungsweise der Umfang des Kreises sein So ist, wenn der Durchmesser 100 ist, die Seite des Zwölfecks $\sqrt{673}$; und jene des 384-ecks ist nahezu gleich dem Bogen, Bei der Berechnung kommt heraus $\sqrt{98683}$. Wenn nun $d^2 : \pi^2 = 10\,000 : 98\,683$, wie gross ist π, wenn $d = 1\,250$, also $d^2 = 1\,562\,500$ angenommen wird? Antwort: Die Wurzel ist 3 927, vom Rest abgesehen".

Schon **Hankel**[86]) hat bemerkt, dass der Umfang des einbeschriebenen regelmässigen 384-ecks ungenau angegeben ist, zu $\sqrt{98\,683}$ statt zu $\sqrt{98\,694}$; noch auffallender ist der ungenaue Wert für die Seite des Zwölfecks, $\sqrt{673}$ statt $\sqrt{670}$. Ganz rätselhaft aber ist die Wahl von 1 250 für den Durchmesser, also 625 für den Halbmesser. Nun gibt **Aryabhatta**[72]) das Verhältnis **Bhâskara**'s, wie dieser selbst bezeugt[87]), in der Form $\frac{62\,832}{20\,000}$, setzt demnach den Halbmesser $= 10\,000$, gleich einer Potenz von 10, wie man bei einem ausgebildeten dekadischen System kaum anders erwarten kann. Nimmt man nun an, dass $\frac{3\,927}{1\,250}$ aus $\frac{62\,832}{10\,000}$ gefunden sei, so stellt sich eine neue Schwierigkeit ein, denn der Umfang des 384-ecks ist $\frac{62831}{10000}$.

Bhâskara selbst gibt in seiner Anmerkung zu den **Siddhântaçiromani**[87]) folgende Erklärung für die Ableitung des in Rede stehenden Verhältnisses: „Nimm einen Halbmesser gleich einer grossen Zahl, einer solchen, die grösser als 10 000, und durch diesen bestimme den Sinus eines kleineren Bogens als der 100ste Teil des Kreisumfangs mit Hülfe des Canons der Sinus, und wenn der so bestimmte Sinus multipliziert wird mit jener Zahl, welche angibt den Teil des Umfangs, als welcher der Bogen angenommen ist, so wird erhalten die Länge des Umfangs, weil ein Bogen, kleiner als der 100ste Teil eines Kreises eine gerade Linie ist. Auf diesem Wege ist der Umfang $= 62\,832$ bestimmt worden von **Aryabhatta** und den anderen für den Durchmesser $= 20\,000$. Obwohl die Länge des Umfangs bestimmt durch das Ausziehen der Quadratwurzel aus dem zehnfachen Quadrat des Durchmessers ungenau ist, so ist sie doch aus Bequemlichkeit so angenommen von **Çrîdhara**, **Brahmagupta** und den anderen, und es ist nicht anzunehmen, dass diese der Ungenauigkeit sich unbewusst waren". Den Hinweis auf die Trigonometrie werde ich im folgenden Abschnitt benutzen; hier nur einige Worte über den Inhalt der Note.

Will man den Umfang eines Kreises mit dem Halbmesser 10 000 bestimmen, so ist die Annahme nicht gestattet, dass $\frac{1}{100}$ des Umfangs eine gerade Linie sei. Freilich wird diese Annahme auch sonst gemacht[88]), insbesondere wird in der Trigonometrie der Inder, worüber man den folgenden Abschnitt vergleiche, der sinus $3\frac{3}{4}^{0}$, d. h. die halbe Seite des 48-ecks, gleich dem Bogen, also $= \frac{1}{96}$ der Peripherie gesetzt, letzteres jedoch nicht ohne Bewusstsein des Fehlers. Sodann muss die Behauptung Verwunderung erregen, dass $\sqrt{10d^2}$ für den Kreisumfang aus Bequemlichkeit genommen sei. Der Inder, der gewandte Rechner, soll den Durchmesser des Kreises in's Quadrat erhoben und aus dem zehnfachen Quadrat die Wurzel ausgezogen haben, wenn ihm das Verhältniss $\frac{3\,927}{1\,257}$ oder $\frac{22}{7}$ bekannt war. Nehmen wir ein Bei-

spiel aus der **Sûryasiddhânta**[89]): „der Durchmesser der Erde ist 1600 *yojanas*[90]). Multipliziere das Quadrat des Durchmessers mit 10, die Quadratwurzel aus diesem Produkt wird der Umfang der Erde sein". Nun soll es bequemer sein, 1600^2 zu bilden, $= 2\,560\,000$, und aus $10 \cdot 2\,560\,000 = 25\,600\,000$ die Quadratwurzel auszuziehen, als 1600 mit $\frac{3\,927}{1\,250}$ oder mit $\frac{22}{7}$ zu multiplizieren. Es bleibt nur die Annahme übrig, dass das Verhältniss $\sqrt{10}$ früher bekannt und gebräuchlich war, als die beiden anderen genaueren. Ganz ausgeschlossen aber scheint mir die Annahme zu sein, dass $\sqrt{10}$ erst aus $\left(3\,\frac{1}{7}\right)^2 = 3 + \frac{2\cdot 3}{7-1}$ abgeleitet worden sei, entsprechend der graeco-arabischen Regel für das Ausziehen der Quadratwurzel : $\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{2\cdot 3+1}$ [91]).

Eine andere Erklärung von $\sqrt{10}$ beruht auf der Formel $\sqrt{s^2 + 6h^2}$ für den Kreisbogen B, wo s eine Sehne, h den „Pfeil", die Höhe des zur Sehne gehörigen Kreisabschnitts, bedeutet. Die Formel findet sich bei **Colebrooke** als Citat **Ganeça**'s aus **Aryabhatta**[92]), doch hat sich herausgestellt, dass nicht das echte **Aryabhattîjam**, sondern die spätere **Mahâsiddhânta** dieselbe enthält[93]). In der Tat ist für $s = d$ der Pfeil $h = \frac{d}{2}$, also der halbe Kreisumfang $= \sqrt{\frac{5}{2}\,d^2}$ und der ganze $= \sqrt{10d^2}$. Den letzteren Wert findet man aber auch sehr nahe für $s = \frac{d}{2}$ und $s = \sqrt{2r^2}$, also für die Sehne zu einem Centriwinkel von 60°, bezw. 90°. Für $s = \frac{d}{2}$ ist $\sqrt{d^2 - s^2} = \frac{d}{2}\sqrt{3} = \frac{13}{15}\,d$, wenn man $\frac{26}{15}$ für $\sqrt{3}$ einsetzt, also $h = \frac{1}{2}\left(d - \frac{13}{15}d\right) = \frac{1}{15}\,d$ und $B^2 = \frac{d^2}{4} + 6\cdot\left(\frac{d}{15}\right)^2 = \frac{83}{300}\,d^2$, mithin $(6B)^2 = \frac{249}{25}\,d^2 = \left(10 - \frac{1}{25}\right)d^2$; und für $s = \sqrt{2r^2}$ ist $\sqrt{d^2 - s^2}$ wieder $= \sqrt{2r^2} - r\sqrt{2} = \frac{17}{12}\,r$, wenn man $\frac{17}{12}$ für $\sqrt{2}$ einsetzt, also $h = \frac{1}{2}\left(d - \frac{17}{24}\,d\right) = \frac{7}{48}\,d$ und $B^2 = \frac{d^2}{2} + 6\cdot\left(\frac{7}{48}\,d\right)^2 = \frac{241}{384}\,d^2$, mithin $(4B)^2 = \frac{241}{24}\,d^2 = \left(10 + \frac{1}{24}\right)d^2$.
Man denke sich nun die Aufgabe so gestellt. Für die Formel $s^2 + xa^2 = B^2$ soll der Köefficient x so bestimmt werden, dass für leicht einzusetzende Werte der Sehne diese Formel für den Bogen mit jener für den Kreisumfang P, nämlich $P^2 = 10d^2$, übereinstimme: für $s = d$ erhält man $\left(\frac{P}{2}\right)^2 = d^2 + x\cdot\frac{d^2}{4}$, für $s = \frac{d}{2}$ $\left(\frac{P}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{4} + x\cdot\frac{d^2}{225}$, für $s = \frac{d}{2}\sqrt{2}$ $\left(\frac{P}{4}\right)^2 = \frac{d^2}{2} + x\cdot\frac{49}{2304}\,d^2$, also für P^2 drei Werte: $4d^2 + xd^2$, $9d^2 + x\cdot\frac{4d^2}{25}$, $8d^2 + x\cdot\frac{49}{144}\,d^2$; nun ist $\frac{4}{25}$ wenig $< \frac{1}{6}$ und $\frac{49}{144}$ wenig $> \frac{1}{3}$, daher genügt $x = 6$ sehr nahe der Aufgabe. Weiter setze ich voraus, dass mit der Näherungsformel eine Konstruktion in Zusammenhang steht, ähnlich wie es sich mit der Quadratur des Zirkels in den **Çulvasûtras** verhält, und zwar nehme ich an, dass der Bogen als Sehne s_1 eines zweiten zu konstruierenden Kreises gesucht wird, dessen Durchmesser ich mit d_1 bezeichne; ferner möge der zur gesuchten Sehne gehörige Pfeil h_1 sein. Für diese Sehne s_1 gilt der auch den Indern bekannte Satz[94]): $s_1^2 = 4h_1(d_1 - h_1)$. Setzt man gleicher Massen in $s^2 + 6h^2$ $s^2 = 4h(d - h)$, also $s^2 + 6h^2 = 4hd + 2h^2$, so hat man die Gleichung $4h_1(d_1 - h_1) = 2h(2d + h)$ oder

$d_1 = d \cdot \frac{h}{h_1} + \frac{h^2 + 2h_1^2}{2h_1}$. Eine sehr einfache Konstruktion ergibt sich nun, wenn man $h_1 = h$, mithin $d_1 = d + \frac{3}{2}$ h oder $r_1 = r + \frac{3}{4}$ h setzt: „Teile h in 4 gleiche Teile, verlängere r um drei dieser Teile, beschreibe mit $r + \frac{3}{4}$ h einen Kreisbogen und konstruiere zu demselben eine Sehne, deren Pfeil wieder = h ist“. (Fig. V.)

Während sich keine Andeutung darüber findet, ob aus der Formel $B = \sqrt{s^2 + 6h^2}$ eine solche für die Sehne s abgeleitet und benutzt worden ist, etwa $s^2 = 2\,[3d\,\sqrt{2(B^2 + 2d^2)} - (B^2 + 6d^2)]$, gibt es zwei andere von einander abhängige Regeln höchst eigentümlicher Art, von denen die eine [95]) die Sehne aus dem Bogen, der Peripherie und dem Durchmesser, die andere [96]) den Bogen aus der Peripherie, dem Durchmesser und der Sehne finden lehrt. Ist B der Bogen, P die Peripherie, d der Durchmesser, s die Sehne, so lassen sich diese Regeln durch folgende Formeln wiedergeben:

$$\text{(I)}\quad s = \frac{4dB\,(P - B)}{\frac{5}{4}P^2 - B\,(P - B)} \qquad\qquad \text{(II)}\quad B = \frac{P}{2} - \sqrt{\frac{P^2}{4} - \frac{\frac{5}{4}P^2 s}{4d + s}}\,.$$

Eine besondere Rolle spielt in der Formel (I) das Produkt B (P — B), das „erste Produkt“ genannt. Löst man diese Formel nach B(P — B) auf, so erhält man

$$\text{(III)}\quad B(P - B) = \frac{\frac{5}{4}P^2 s}{4d + s}.$$

Vergleicht man nun Formel (II) und (III) mit denen für den „Pfeil“ h

$$h = \frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{s^2}{4}} \qquad \text{und} \qquad h\,(d - h) = \frac{s^2}{4}$$

so tritt klar hervor, dass P als Durchmesser, B als „Pfeil“ und $2\sqrt{B(P - B)}$ als Sehne eines Kreises gedacht sind. Die halbe Sehne ist nach Formel (III) zu $\frac{P}{2}\sqrt{\frac{5s}{4d + s}}$ angenommen worden, also für s = d gleich $\frac{P}{2}$ und für $s = \frac{d}{2}$ gleich $\frac{P}{2}\sqrt{\frac{5}{9}}$ zu setzen, und ihr Quadrat gleich $\frac{P^2}{4}$, bezw. gleich $\frac{5}{36}P^2$. Für ersteren Wert wird in der Formel (II) $\sqrt{\frac{P^2}{4} - \frac{\frac{5}{4}P^2 s}{4d+s}} = 0$, für letzteren $= \frac{P}{3}$, also $B = \frac{P}{2}$ bezw. $= \frac{P}{6}$. Für die beiden Argumente s = d und $s = \frac{d}{2}$ ist demnach die Formel (II) und selbstverständlich auch die Formel (I) exakt, und es ist anzunehmen, das $\frac{5s}{4d + s}$ mit Rücksicht hierauf als Köefficient von $\frac{P}{2}$ gewählt ist. Man hat vielleicht so geschlossen: B(P — B) ist abhängig von s und d, und da dieses Produkt für s = d zu $\frac{P^2}{4}$, für $s = \frac{d}{2}$ zu $\frac{5}{36}P^2 = \frac{P^2}{4} \cdot \frac{5}{9}$ wird, so muss $\frac{P^2}{4}$ als Köefficienten eine Funktion von s und h erhalten, welche für s = d zu 1 und für $s = \frac{d}{2}$ zu $\frac{5}{9}$ wird. Wählt man für diese Funktion die willkürliche Form $\frac{as}{bd + cs}$, so folgt aus

$$\frac{as}{bd+cs} = 1 \text{ für } s = d \qquad\qquad a = b + c \qquad\qquad \text{und aus}$$

$$\frac{as}{bd+cs} = \frac{5}{9} \text{ für } s = \frac{d}{2} \qquad\qquad 9a = 10b + 5c \qquad\qquad \text{, also}$$

$$9b + 9c = 10b + 5c \quad \text{und} \quad b = 4c\;,\; a = 5c\;,\quad \frac{as}{bd+cs} = \frac{5s}{4d+s}.$$

Für $B = \frac{P}{4}$ folgt aus (I) $s = \frac{12}{17} d$, und da $s : \frac{d}{2} = \sqrt{2}$ ist,

$\sqrt{2} = \frac{24}{17}$ wo $2 \cdot 17^2 - 24^2 = 2$ der Formel $2a^2 - b^2 = 2$ entspricht;
wenn man aber $s : d = 1 : \sqrt{2}$ setzt, so ergibt sich unser bekannter Näherungswert

$$\sqrt{2} = \frac{17}{12}.$$

Selbstverständlich ist für $s = \frac{12}{17} d$ die Formel (II) exakt. Hiernach haben die Inder eine gewisse Berechtigung gehabt, ihre so wunderlich aussehenden Formeln für recht genau zu halten.

IV. Die Trigonometrie.

Die **Sûrya Siddhânta** enthält eine Sinustafel [97]), welche von einem Winkel $= 3\frac{3}{4}^{0}$ um je $3\frac{3}{4}^{0}$ bis zu einem solchen $= 90^0$ fortschreitet und die Sinus in Bogenminuten angibt; also auch hier, wie bei der am Ende des vorigen Abschnitts besprochenen Formel, eine Arcufication, dort der Sehnen, hier der halben Sehnen. Der sinus $3\frac{3}{4}^{0}$ wird gleich dem Bogen gesetzt $= 225'$ und der erste Sinus genannt. Für die Berechnung der übrigen Sinus wird dann folgende Regel gegeben [98]): „Dividiere den ersten Sinus durch sich selbst, subtrahiere den Quotienten von dem Sinus und addiere den Rest zum Sinus: die Summe wird sein der zweite Sinus. In derselben Weise dividiere nach einander die (gefundenen) Sinus mit dem ersten Sinus, subtrahiere die (Summe der) Quotienten vom Divisor und addiere den Rest zu dem letzt gefundenen Sinus, und die Summe wird sein der nächste Sinus.“ Prüft man diese Regel an der Tafel, so stellt sich heraus, dass sie nur bis sin $26\frac{1}{4}^{0}$ passt. Es sind nämlich der Reihe nach

die Sinus der Tafel:	225,	449,	671,	890,	1 105,	1 315,	1520,	
die Quotienten:	1,	$2-\frac{1}{225}$,	$3-\frac{4}{225}$,	$4-\frac{10}{225}$,	$5-\frac{20}{225}$,	$6-\frac{35}{225}$,	$7-\frac{55}{225}$,	
deren Summen:	1,	$3-\frac{1}{225}$,	$6-\frac{5}{225}$,	$10-\frac{15}{225}$,	$15-\frac{35}{325}$,	$21-\frac{70}{225}$,	$27\frac{100}{225}$,	
die bezüglichen Reste:	224,	$222\frac{1}{225}$,	$219\frac{5}{225}$,	$215\frac{15}{225}$,	$210\frac{35}{225}$,	$204\frac{70}{225}$,	$197\frac{125}{225}$,	
also die Sinus der Regel:		449,	$671\frac{1}{225}$,	$890\frac{6}{225}$,	$1\,105\frac{21}{225}$,	$1\,315\frac{56}{225}$,	$1\,519\frac{126}{225}$,	$1\,717\frac{26}{225}$.

Man würde hiernach den sinus 30^0 zu $1717\frac{26}{225}$, wenig $>$ 1717 erhalten, während die Tafel 1719′ gibt, entsprechend dem für $\sin 90^0 = r$ gegebenen Werte 3 438′. Da der Fehler ein wachsender ist, so gilt die Regel der **Sûrya Siddhânta** nur für kleine Winkel, für Winkel kleiner als 30′

Bhâskara gibt in einem Anhang zur **Siddhântaçiromani** [99]) einen kurzen Abriss der Trigonometrie, dessen Inhalt, soweit er für die besprochene Tafel Bedeutung hat, ich kurz angeben werde. Er kennt die Sätze $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$ [100]) und lehrt ihre Anwendung auf die Berechnung einer um $3\frac{3}{4}^{0}$, wie auch einer von Grad zu Grad

fortschreitenden Sinustafel. Seine Regeln lassen sich in zwei Formeln fassen:

$$\sin\left[(n\pm1)\cdot 3\tfrac{3}{4}^0\right] = \sin\left(n\cdot 3\tfrac{3}{4}^0\right) - \frac{1}{467}\sin\left(n\cdot 3\tfrac{3}{4}^0\right) \pm \frac{100}{1529}\cos\left(n\cdot 3\tfrac{3}{4}^0\right)$$ [101] und

$$\sin(x\pm1)^0 = \sin x^0 - \frac{1}{6569}\sin x^0 \pm \frac{10}{573}\cos x^0$$ [102].

In ersterer Formel setzt demnach **Bhâskara**

$$\cos 3\tfrac{3}{4}^0 = 1 - \frac{1}{467} = \frac{466}{467} \quad \text{und} \quad \sin 3\tfrac{3}{4}^0 = \frac{100}{1529},$$ in letzterer

$$\cos 1^0 = 1 - \frac{1}{6569} = \frac{6568}{6569} \quad \text{und} \quad \sin 1^0 = \frac{10}{573}$$ [103].

Wenn ich mich nun zu der Frage wende, wie diese ausserordentlich genauen Werte gefunden sein mögen, so fällt mir zunächst die Form der für die Sinus gegebenen Brüche auf, indem bei beiden der Zähler eine runde Zahl ist. Da aber sinus 1^0 auch noch auf $\frac{1}{5730}$ genau ist, so habe ich gleiche Zähler, beide = 100. Es scheint mir daher nicht sowohl der Sinus als die Cosecante des Winkels berechnet zu sein, oder mit anderen Worten, mir scheint der halben Sehne ein konstanter Wert 100 und dem Halbmesser ein variabeler Wert beigelegt zu sein. Es sei (Fig. VI) 100 die halbe Seite eines regelmässigen Sechsecks, so ist der Halbmesser des umbeschriebenen Kreises = 200 und der des einbeschriebenen = $\sqrt{30\,000}$, oder wenn ich **Bhâskara**'s Methode auf einen quadratischen Faktor 1000^2 anwende = $173\frac{41}{200}$. Wenn man nun die Kathete $173\frac{41}{200}$ um die Hypotenuse 200 verlängert, so erhält man den Halbmesser des einem regelmässigen Zwölfecks mit der Seite 200 einbeschriebenen Kreises = $371\frac{41}{200}$, also den des umbeschriebenen aus $\sqrt{\left(373\frac{41}{200}\right)^2 + 100^2}$. Bezeichnet man den Halbmesser des einem regelmässigen n—eck einbeschriebenen Kreises mit ϱ_n, den des umbeschriebenen mit r_n, so erhält man

$\varrho_{12} = 373\frac{41}{200}$, $r_{12} = 386\frac{37}{100}$, $\varrho_{96} = 3\,054\frac{137}{200}$, $r_{96} = 3\,056\frac{8}{25}$,

$\varrho_{24} = 759\frac{23}{40}$, $r_{24} = 866\frac{13}{100}$, $\varrho_{192} = 6\,111\frac{1}{200}$, $r_{192} = 6\,111\frac{33}{40}$,

$\varrho_{48} = 1525\frac{141}{200}$, $r_{48} = 1528\frac{49}{50}$, $\varrho_{384} = 12\,222\frac{83}{100}$, $r_{384} = 12\,223\frac{6}{25}$,

Zunächst ist dieses Verfahren auf seine geometrische Grundlage anzusehen. Weder der Satz, dass der Aussenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks doppelt so gross ist als der Basiswinkel, noch der, dass der Peripheriewinkel die Hälfte eines auf demselben Bogen stehenden Centriwinkels ist, wird sich bei den Indern ausgesprochen finden. Dagegen lässt sich eine stillschweigende Anwendung des letzteren Satzes in ihrem Verfahren erkennen, den Halbmesser des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises gleich dem Produkte zweier Seiten dividiert durch die doppelte Höhe zur dritten Seite abzuleiten [104]. Ferner lehren die **Çulvasûtras**, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und sofort als die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks zu finden, indem man eine Kathete = 1 konstant beibehalten, die andere zunächst auch = 1 setzen, ihr aber dann jedes Mal die Länge der Hypotenuse des vorhergehendeu Dreiecks geben soll [105]. Das wäre, wenn auch nicht Dasselbe, doch etwas Aehnliches, wie mein Verfahren, die eine Kathete = 100 beizubehalten und die andere immer gleich der Summe der anderen Kathete und der Hypotenuse des vorhergehenden Dreiecks zu machen. Endlich

wäre zu der Wahl des quadratischen Faktors 1000^2 zu bemerken, dass sie dem Wortlaut von **Bhâskara**'s Regel nicht widerspricht, sich aber nicht aus seinen Anwendungen der Regel belegen lässt, die alle den quadratischen Faktor 100^2 ergeben. Ich bin zu jener Wahl gekommen, um die schwierige Entscheidung zwischen $173\frac{20}{100}$ und $173\frac{21}{100}$ zu vermeiden. Uebrigens habe ich mich überzeugt, dass es auf die Ergebnisse keinen wesentlichen Einfluss hat, mag man $\varrho_6 = 173\frac{20}{100}$ oder $= 173\frac{21}{100}$ statt $= 173\frac{41}{200}$ setzen.

Was die aus dem Verfahren sich ergebenden Werte angeht, so hat man $\sin 3\frac{3}{4}^0 = \frac{100}{1529}$ unmittelbar, der sinus 1^0 dagegen muss erst aus $\sin\frac{15^0}{16} = \frac{100}{6\,112}$ abgeleitet werden. Dabei ist zu beachten, dass $r_{192} = 6\,111\frac{33}{40}$ von $2\,r_{96} = 6\,112\frac{16}{25}$ sich nur um $\frac{163}{200}$ unterscheidet, man daher einen sehr kleinen Fehler begeht, wenn man $r_{180} : r_{192} = 180 : 192 = 15 : 16$, also $r_{180} = r_{192} - \frac{1}{16}\,r_{192} = 6\,112 - 382 = 5730$ setzt. So ergäbe sich leicht $\sin 1^0 = \frac{100}{5730} = \frac{10}{573}$. Setzt man nun $\sin 1^0$ gleich seinem Bogen oder $\frac{10}{573}\,r = 60'$, so hat man $r = 3\,438'$ genau. Ferner findet man für den Halbmesser des dem regelmässigen 384—eck umbeschriebenen und den des einbeschriebenen Kreises, wenn man sich auf ganze Zahlen beschränkt, denselben Wert 12 223, eine Zahl $> 10\,000$ Man hat daher für den Durchmesser 20 000 eines Kreises den Umfang $= \frac{100.\ 2.\ 384}{2,\ 12\,225} \cdot 20\,000 = 768\,000\,000 : 12\,223 = 62\,832$ (Rest 4 464). Sodann kann man $\cos 3\frac{3}{4}^0$ aus $\sqrt{1 - \sin^2 3\frac{3}{4}^0}$ berechnen, zu $1 - \frac{1}{468} > \sqrt{1 - \frac{100^2}{2.\ 1529^2}} > 1 - \frac{1}{467}$; freilich könnte man denselben auch aus sinus versus $3\frac{3}{4}^0 = \left(1528\frac{49}{50} - 1525\frac{141}{200}\right) : 1528\frac{49}{50} = 655 : 305\,796 > \frac{1}{467}$ finden, doch ist die Gefahr, ungenaue Werte zu erhalten, eine grosse und mit abnehmendem Winkel wachsende. So würde ein Versuch, $\cos 1^0$ aus sin versus 1^0 $\left(\text{dieser aus } [5730 - \frac{15}{16}\,\varrho_{192}] : 5730\right)$ zu berechnen, durchaus misslingen; aber auch aus $\cos 1^0 = \sqrt{1 - \frac{10^2}{573^2}}$ erhalte ich nicht $1 - \frac{1}{6\,569}$, sondern $1 - \frac{1}{6\,566}$, ein Wert, der freilich genauer als jener ist.

Bhâskara gibt a. a. O.[106]) an, dass $\sin 3\frac{3}{4}^0 = 225'$, also gleich dem Bogen, nicht genau sei; vielmehr sei derselbe $= 224\frac{6'}{7}$. Nimmt man, wie oben an, dass $\sin 1^0$ mit dem Bogen zusammenfalle, so sind $225' = \frac{10}{573}\,r \cdot \frac{15}{4} = \frac{100}{1528}\,r$; es ist daher $\sin 3\frac{3}{4}^0 = \frac{100}{1529}\,r$ nicht gleich $225'$, sondern gleich $225 \cdot \frac{1528}{1529} = 225 - \frac{225}{1529} = 225 - \frac{1'}{7}$. Ein genauerer Wert als $3\,438'$ für den Halbmesser würde sich aus $\sin 28\frac{1'}{8} = \frac{s_{384}}{r} = \frac{10}{12\,223}$ ergeben, nämlich $3\,437\frac{23}{32}$; doch kann diesen **Bhâskara** bei seiner Bemerkung nicht im Auge gehabt haben, da sich aus demselben $\sin 3\frac{3}{4}^0 = 225 - \frac{1'}{6}$ ergibt,

Die Sinustafel an der Hand von **Bhâskara**'s Formel zu prüfen. hat seine grossen Schwierigkeiten, da man zugleich ermitteln müsste, inwieweit die bei der Rechnung auftretenden Brüche berücksichtigt worden sind. Wie der eben besprochene Wert $224\frac{6'}{7}$ für sin $3\frac{3'}{4}$ schon vermuten lässt, es scheint sin 90^0 = genau 3 438' gesetzt worden zu sein; denn aus sin 90^0 = $3\,437\frac{21'}{32}$ würde sich der richtige Wert 3 430' für sin $86\frac{1}{4}^0$ ergeben haben, nicht der in der Tafel enthaltene 3 431'. Die für r_{24}- und r_{12} gefundenen Werte gestatten, die für sin $7\frac{1}{2}^0$ und sin 15^0 gegebenen Werte zu prüfen: sie sind auf die Minute genau. Auffallend ist, dass der leicht kontrollierbare sinus $22\frac{1}{2}^0$ ungenau angegeben ist, zu 1 315, statt zu 1316'.

Es hat ein gewisses Interesse, die hier gegebene Kreismessung mit der des **Archimedes** zu vergleichen. Sie stimmen darin überein, dass die halbe Seite des regelmässigen 2^n 3-ecks als Einheit angesehen, also cosec $\frac{30^0}{n}$ bezw. cotg $\frac{30^0}{n}$ berechnet wird. Freilich kann der den Griechen so geläufige Satz, den A. anwendet, dass die Halbierungslinie eines Winkels im Dreieck die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt [107], nicht ohne Weiteres als den Indern bekannt vorausgesetzt werden. Ich musste daher einen andern geometrischen Satz wählen und zwar einen solchen, welcher der Anschauung mehr als der griechische zu Hülfe kommt. Wenn ich ferner für die Inder die ängstliche Genauigkeit der Griechen hätte nachahmen wollen, hätte ich für den Halbmesser des ein- wie des umbeschriebenen Kreises jedes Mal die obere und untere Grenze bestimmen müssen. Ist diese Erleichterung auf Kosten der Genauigkeit, eine andere ohne diesen Nachteil liegt darin, dass ich für die halbe Seite des ein- und des umbeschriebenen Vielecks dieselbe Einheit 100 benutze, während **Archimed** für die des umbeschriebenen 153 hat, für die des einbeschriebenen von 780 ausgeht, dafür zunächst 240 und zuletzt 66 für 240 einführt.

Schlusswort. Die vorstehende Arbeit bewegt sich auf Gebieten, wo man bei lückenhaftem Material sich auf Vermutungen angewiesen sieht. Nun geschieht es zu leicht, dass man, in seinem eigenen Gedankengang befangen, sich manches zurechtlegt, manches übersieht. Sache des unbefangenen Leser ist es, zu bemerken, wo dieser Fehler begangen wird, von dem freilich, wer in die Denkweise anderer eindringen will, sich am ehesten frei halten sollte. Nicht also will ich Fragen entscheiden, über die ein abschliessendes Urtheil kaum je erwartet werden darf. Mir ist es genug, wenn ich im Widerstreit der Meinungen gehört werde.

Anmerkungen.

1, Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I. Band, Leipzig 1880*), p. 154, 155. Hankel, zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, Leipzig, 1874,*) p. 102. Günther, die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwicklungsmethoden*), Supplement zum 27. Jahrgang der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Leipzig 1882, p. 8. Nach Cantor a. a. O. Euklid, Elemente, X, 117. 2. Aristoteles, Analyt. prot. I, 23, 11 und I, 44, 3 edit. Duvall. Vergl. Cantor, p. 154, Anm. 4 und Hankel, p. 102, Anm. 2. 3. Plato, Stat. VIII, 546, B, C; vergl. Cantor, p. 191, Günther, p. 7. 4. Cantor p. 369, Günther p. 23 und 24. 5. Günther p. 25. 6 Cantor p. 192. Günther p. 25. 7. Cantor p. 191. 192. 334. 337. 369; Günther p. 7. 8. 14. 19. 20. 23—25. Auch gibt letzterer auf p. 38 und 39 aus dem Talmud und seinen Auslegern Näherungswerte für $\sqrt{2}$ an, welche, wie die mathematischen Kenntnisse der Juden überhaupt, von Cantor (vergl. Günther, p. 37 und Citat 131) auf griechischen Ursprung zurückgeführt werden. 8. Cantor p. 273. 370; Günther p. 59, 63. 9. Hultsch, das Grundmass der griechischen Tempelbauten, Archæologische Zeitung, 38. Jahrgang, p. 91 ff, nach Günther Citat 180. 10. Günther p. 47. 11. Günther p. 49. 50. 98—100. 12. Günther, p. 49. 13. Günther p. 50. 14. Günther p. 50. 99. 15. Günther p. 100. 16. Günther p. 90. 91. 17. Tannery, Sur la mesure du cercle d'Archimède, in den Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 2e série, tome IV, Paris et Bordeaux 1882, p. 313—337**). Günther p. 87—89. 18. Günther p. 90. Z. 5—3 v. u. 19. Tannery p. 325, der Heiberg, Quaestiones Archimedeæ, p. 63—65, anzieht. 20. Günther p. 90. Anm. 21. Günther p. 91. 22. Tannery p. 332 ff. 23. Cantor p. 334. 24. Cantor p. 470. Günther p. 28. 33. 34. 25. Tannery p. 184. 26. Tannery p. 322. 185; mir scheint freilich T. das direkte Vorkommen von $\frac{5}{3}$ nicht behaupten zu wollen, vielmehr $\frac{5}{3}$ als Näherung ersten Grades in $\frac{26}{15} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{15}$ enthalten zu sehen. 27. Cantor p. 258. 272—273; Günther p. 10; Tannery p. 316. 321 ff. 28. Günther p. 62. Citat 209. 29. Günther p. 66—71. 30. Vergl. das Urteil Hankel's über Diophant p. 157 ff. 31. Platon, Theætet 147 D, vergl. Cantor p. 154. 32. Cantor p. 154 Z. 9 u. 8 v. u. 33. Cantor p. 136. 137. 420. 545. 34. Von Hultsch an Bauwerken nachgewiesen, Günther p. 47, 48. 35. Bei Gerber, s. Cantor p. 745. Günther p. 36. 36. Günther p. 129. p. 104—108. 37. Günther p. 49. 38. Tannery p. 186. 187; Günther p. 125. 39 Cantor p. 259. 40. Tannery p. 315. 316. 41. Tannery p. 317. 42. Tannery p. 319. 43. Heiberg, Quæstiones Archimedeæ p. 59 ff. derselbe, Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii, Leipzig, 1880 und 1881, Band II, p. 266—271; vergl. Hultsch, Die geometetrische Zahl in Platon's VIII. Buche vom State, in der „Zeitschrift für Mathematik und Physik" 27. Jahrgang, historisch-literarische Abtheilung p. 59. Anm. 32 und 35. 44. Bei Tannery p. 318, überall statt $\frac{1}{16}$ der übrigens die Rechnung nicht störende Fehler $\frac{1}{4}$. 45. Tannery p. 176. Beispiel 1. p. 178. Beispiel 10. 46. Tannery p. 318. 47. Tannery p. 319. 48. Tannery p. 320. 49. L'Arithmétique des Grecs dans Heron d'Alexandrie**). 50. Günther p. 14—20. p. 118—127. 51. Hierher lässt sich auch stellen $\sqrt{\frac{13}{4}} = 1\frac{4}{5}$, bei dem Talmud-Erklärer Maimonides (Günther p. 37. 38. 57), nämlich $2 - \frac{1}{5} < \sqrt{4 - \frac{3}{4}}$, $\frac{1}{5}$ aus $\frac{3}{16}$; setzt man aber $\sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{13}$, so muss man eine Annäherung 2. Grades annehmen $4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 5} < \sqrt{\left(3\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$, $\frac{1}{2 \cdot 5}$ aus $\frac{3}{28}$. 52. Günther p. 38. 53. Tannery p. 385; dort durch einen Druckfehler $\sqrt{7 + 6\sqrt{3}}$. 54. Günther p. 14. 55. Cantor p. 334. 337; Günther p. 19 u. 20. 56. Cantor p. 655—664. 57. Cantor p. 420; Günther p. 26 ff. 58. Thibaut, the Sulvasutras, reprinted from the Journal

*) in der Folge nur mit Cantor, bezw. Hankel, bezw. Günther citiert.

**) in demselben Bande, S. 161 — 194, vom nämlichen Verfasser: l'Arithmétique des Grecs dans Heron d'Alexandrie. — Ich werde aus beiden Arbeiten unter Tannery und der Seitenzahl des Bandes citieren.

Asiatic Society of Bengal, Part I for 1875, Calcutta 1875*). Seite 13—15; Cantor p.545 ; Günther p.41. 59. Thibant p. 26—28 ; Cantor p. 546 ; Günther p. 41. 42. 60. Cantor p. 547. Günther p. 42 61. Colebrooke, Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the Sanskrit of Brahmegupta and Bhàskara, London 1817, p. 147**). Cantor p. 532. 62. also für $\sqrt{2} = \frac{17}{12}$ die Diagonale $= \frac{5}{4}$ des Durchmessers. Albrecht Dürer setzt (Cantor p.547, Anm. 1) den Durchmesser eines Kreises, der mit einem gegebenen Quadrat gleiche Fläche hat, $= \frac{8}{10}$ der Diagonale, was der reciproke Wert jenes Verhältnisses wäre. Doch könnte (Fig IVa.) $\frac{8}{10}$ auch aus $EH : EB = (EJ + JH) : EB = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}) = \frac{1}{3}(1 + \sqrt{2})$ für $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$ abgeleitet werden 63. Cantor p. 50. 64. Cantor p. 448. Günther p. 42. 65. Rodet, Lecons de calcul d'Aryabhata, Journal Asiatique, 1879***), p. 9, IV und V, p.17 ff, Noten zu IV und V. Colebrooke p.9. § 21 ; ebendort p. 12. § 27.28 Cantor p. 532. 66. Colebrooke p. 60 § 138. Bhâskaras' Regel wird genau wiedergegebeu von einem arabischen Rechenbuche, welches Joannes Hispalensis in's Lateinische übersetzt hat, s. Cantor p.685,686 und Günther p. 45. 46. 67. Bei Colebrooke durch einen Druckfehler 2 352 000. 68. Colebrooke p. 79. 80. § 187—189 69. Colebrooke p. 89. Anm. 3; Cantor p. 558. 70. Colebrooke p. 308. § 40. 71. Colebrooke p. 87. § 201, 72. Colebrooke p. 95. § 214. 73. Rodet p. 11, X. p. 22. 23, Note zu X. 74. Colebrooke p. 308. § 40 ; Translation of the Sûrya Siddhànta by Pundit Bàpú Deva Sastri and of the Siddhànta s'iromani, by the late Lancelot Wilkinson, from the Sanskrit, Calcutta 1861, p. 11. Cantor p. 551. Hankel p. 216. 217. 75. Colebrooke p. 89. § 206. 207. 76. Colebrooke p. 310. § 42. 77. Colebrooke p. 87. Anm. 4. 78. Cantor p.527. 79. Colebrooke p .8. § 18. 19. 80. Colebrooke p. 224. § 150. 81. Colebrooke p. 59. § 135. p. 222. § 147. 82. Cantor p. 357. 83. Colebrooke p. 87; 88. § 202. 84. Heis, Aufgaben-Sammlung p. 314. 75. Cantor p. 522. 539. 86. Hankel p. 216. 87. Siddhânta çiromani (vergl. Citat 74) p. 122. Anm. zu § 52. Hankel p. 216. Anm. 1. 88. Siddhânta çiromani p. 114 § 13. 89. Siddhânta çiromani p. 11 § 59. 90. Colebrooke p. 2. § 5. 6. 91. Günther p. 55. 92. Colebrooke p. 90. letzter Absatz der Anmerkung. 93. Hankel p. 216. Anm. 2. 94 Colebrooke p. 90. § 207 und p. 309 § 41. 95. Colebrooke p. 94 § 213. Cantor p. 561 96. Colebrooke p 95 § 215. 97. Sûrya Siddhânta, § 17—22. Cantor p. 559. 560. Hankel p. 217. 218. 98. Sûrya Siddhânta § 15. 16. 99. Appendix zu Siddhânta çiromani (s. Citat 74) : On the Construction of the canon of sines, 100. Canon (s. Citat 99), § 21, 22. 101 Canon § 16. 17. 102. Canon § 18. 19. 103. Cantor, p. 561. Hankel p. 218. 104. Colebrooke p. 299. 300. § 27. Hankel p. 207. 105. Thibaut, p. 16. Cantor p. 544. 106. Canon § 20. 107. Cantor p. 259. Günther p. 14.

*) weiterhin nur mit Thibaut citiert.
**) künftig nur unter Colebrooke angeführt.
***) künftig nur unter Rodet citiert.

Berichtigungen.

S. 5, Z. 1 v. o. lies $2b_2 a_2$ statt $2ba_2$. — S. 5, Z. 22 v. o. lies $3a^2$ statt $3a_2$. — S. 6, Z. 2 v. o. lies $(n\alpha^2 + \beta^2)^2$ statt $(n\alpha^2 + \beta^2)$. — S. 7, Z. 1 v o. lies an statt in. — S. 9, Z. 1 v. o. lies oder statt aber. — S. 15, Seite 14 v. o. lies $-\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{58}$ statt $+\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{58}$. — S. 16, Z. 7 v. o. hinter $\frac{1}{2 \cdot 3} +$ schiebe ein $\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} -$. — S. 16, Z. 8 v. u. lies $\frac{1}{28} \cdot \frac{9}{463}$ statt $\frac{1}{29} \cdot \frac{9}{461}$ — S. 17, Z. 9 v. o. lies $= \frac{13}{15} s_6$ statt $- \frac{13}{15} s_6$. — S. 19, Z. 10 v. o. lies $52\frac{1'}{5}$ statt $52\frac{1'}{2}$. — S. 22, Z. 9 v. u. lies $<$ statt $=$. — S. 23, Z. 2 v. o. lies $\frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 8}$ statt $\frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 2}$. — S. 24, Z. 15 v. o. lies $+\sqrt{2700}$ statt $=\sqrt{2700}$. — S. 28, Z. 7 v. o. lies der Radikand 10 statt $\sqrt{10}$ und $3^2 +$ statt $3 +$. — S. 31, Z. 15 v. u lies 766 statt 866. — S. 32, Z. 15 v. u. lies 2 · 12 223 statt 2, 12 2.5. — S. 32. Z. 3 v. u. lies 100 statt 10. — S. 12, Z. 4 v. o., S. 15, Z. 2 v. o, S. 25, Z. 10 v. u. und S 26, Z. 2 v. o. ist von einem Wurzelzeichen nur der Strich gedruckt worden.

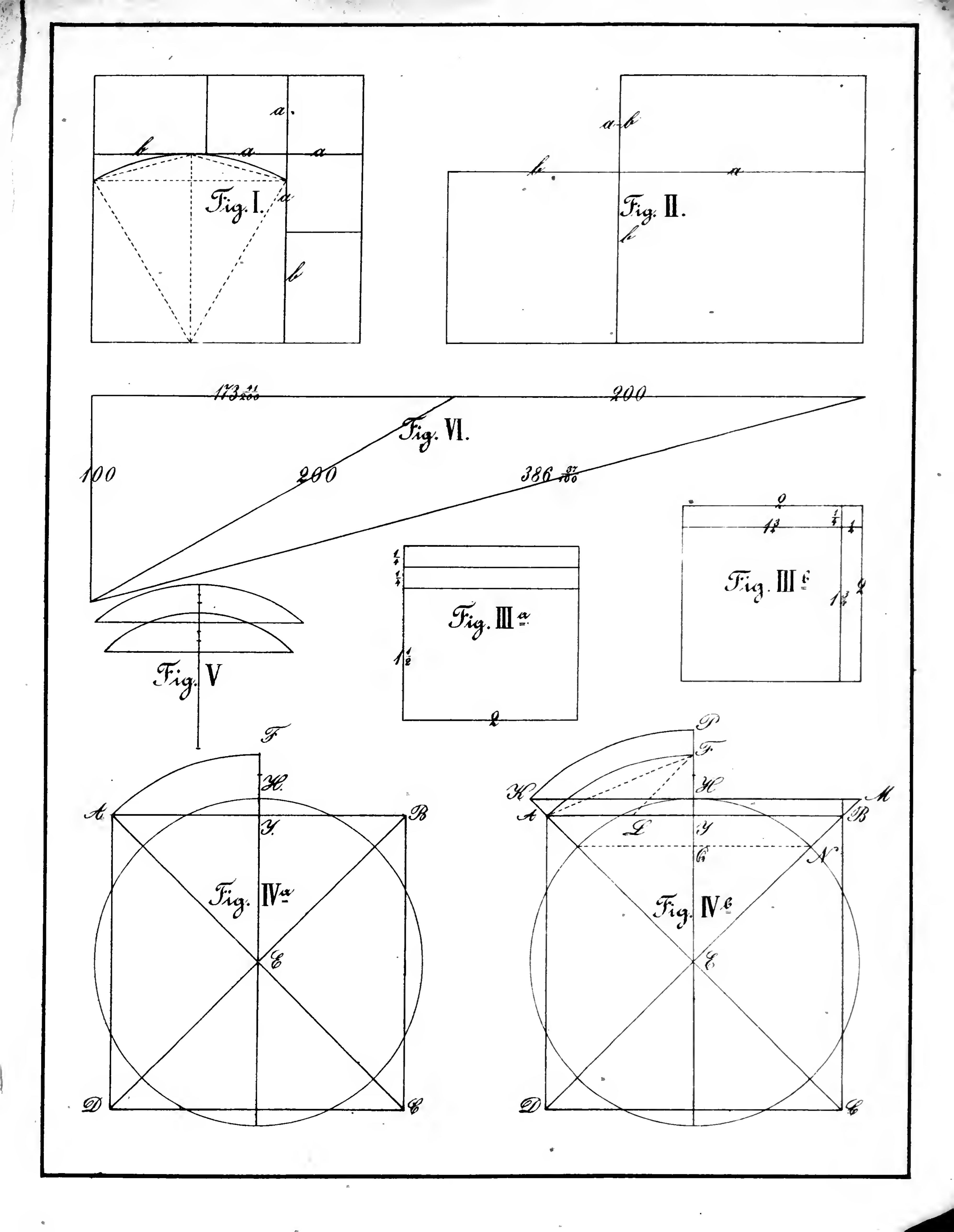


Fig. I.
a
b
a
a
a
b
Fig. II.
a-b
b
a
b
Fig. VI.
173 41/200
200
100
200
386 37/100
Fig. V
Fig. III a
1/4
1/4
1 1/2
2
Fig. III b
2
1 3/4
1/4
1/4
1 3/4
2
Fig. IV a
F
H.
A.
B
Y.
E
D
C
Fig. IV b
P
F.
H
K
M
A
B
L
Y
G
N
E
D
C

